ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

que je puis désigner par $V^{(n)}\,|[z]|$, telle que ($z \equiv t$ dans l'intervalle $(-n, n)$):

$$|U|[t]|| - V^{(n)}\,|[z]|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et en se reportant à l'inégalité (β), il vient:

$$|U|[z]|| - V^{(n)}\,|[z]|| < \varepsilon\,.$$

$V^{(n)}\,|[z]|$ répond à la question.

Matematica. — *Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation.* Nota di R. GATEAUX, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Matematica. — *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata dal Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

Matematica — *Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Matematica. — *Sur les fonctions permutables analytiques.* Nota II di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm.* Nota II di CARLO SEVERINI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Come nella Nota I ([1]), data l'equazione integrale di prima specie

$$\int_a^b K(x\,,y)\,F(y)\,dy = f(x)\,, \tag{1}$$

in cui $K(x, y)$ ed $f(x)$ sono funzioni note continue, e per la quale esista almeno una soluzione $F(y)$, sommabile insieme col suo quadrato, sia

$$\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\ldots\,,\,\lambda_n\,,\,\ldots$$

([1]) Questi Rendiconti, 1° sem., fasc. 3°, 1914. Valgono per il seguito le osservazioni ivi fatte, contenute nelle note ([2]) e ([3]).

la successione delle costanti del nucleo $K(x, y)$, e

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{2}$$

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots, \tag{3}$$

la successione delle coppie di funzioni ortogonali dello stesso nucleo, per le quali risulta:

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, y)\, \psi_n(y)\, dy$$

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(y, x)\, \varphi_n(y)\, dy \quad (^1).$$

A complemento di quanto è stato ivi detto sul modo di rappresentare la soluzione generale della (1), mi propongo di far vedere, che si può costruire una funzione

$$\Psi(x, d_1, d_2, \ldots), \tag{4}$$

contenente, se il sistema delle funzioni ortogonali (3) non è chiuso, un insieme finito o numerabile di costanti arbitrarie, soggette in quest'ultimo caso alla condizione che converga la serie dei loro quadrati; in guisa che, per valori comunque assegnati a tali costanti, la (4) rappresenti una soluzione della (1), sommabile insieme col suo quadrato, e che d'altra parte ogni soluzione cosiffatta venga dalla (4) rappresentata, quando si fissino convenientemente le costanti medesime. Il numero delle costanti arbitrarie è finito, se le (3) ammettono un sistema complementare finito, un sistema, cioè composto di un numero finito di funzioni, che, aggregate alle (3), diano luogo ad un sistema chiuso di funzioni ortogonali.

1. Supposto il sistema delle funzioni ortogonali (3) non chiuso, s'indichi con

$$\chi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

una successione di funzioni, sommabili insieme coi loro quadrati, tali che non esistano soluzioni effettive per le equazioni integrali

$$\int_a^b \theta(x)\, \chi_i(x)\, dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

in particolare può considerarsi la successione

$$\chi_i(x) = x^{i-1} \; (^2) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

o un determinato sistema chiuso, qualsivoglia, di funzioni ortogonali.

(1) Cfr. E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, Mathematische Annalen, Bd. LXIII (1906), Heft. 4, pag. 461.

(2) Cfr. C. Severini, *Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVI, 2° sem. 1913, § 10.

Mediante le (5), si costruisca [1] per il sistema (3) un sistema complementare:

$$\psi_1'(x) \,.\, \psi_2'(x) \,, \dots \,, \psi_j'(x) \,, \dots \tag{6}$$

È facile il vedere che ogni soluzione $\eta(x)$ delle equazioni integrali

$$\int_a^b \eta(x)\, \psi_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 1\,, 2\,, \dots), \tag{7}$$

cioè dell'equazione

$$\int_a^b \mathrm{K}(x\,, y)\, \eta(y)\, dy = 0\,, \tag{8}$$

è rappresentata dalla serie

$$\eta(x) = \mathrm{T}_1(x) + \sum\nolimits_\nu [\mathrm{T}_{\nu+1}(x) - \mathrm{T}_\nu(x)]\,, \tag{9}$$

ove

$$\mathrm{T}_\nu(x) = \sum\nolimits_j \frac{c_j}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} \psi_j'(x)\, dx \quad , \quad c_j = \int_a^b \eta(x)\, \psi_j'(x)\, dx\,, \tag{10}$$

ed

$$h_1\,, h_2\,, \dots\,, h_\nu\,, \dots$$

indica una successione, comunque scelta, di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero; in particolare: che si ha anche

$$\eta(x) = \sum\nolimits_j c_j\, \psi_j'(x) \quad , \quad c_j = \int_a^b \eta(x)\, \psi_j'(x)\, dx\,, \tag{11}$$

se il sistema (6) è composto di un numero finito di funzioni, ovvero la serie $\sum_j c_j\, \psi_j'(x)$ converge nell'intervallo $(a\,, b)$. A tal'uopo si osservi che, convergendo in media la successione

$$\bar{\mathrm{S}}_m(x) = \sum_1^m{}_j\, c_j\, \psi_j'(x) \qquad (m = 1\,, 2\,, \dots)\,,$$

esiste una funzione $\bar{\eta}(x)$, sommabile insieme col suo quadrato, unica e ben determinata, se si eccettuano i punti di un insieme di misura nulla, per la quale si ha:

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left[\bar{\eta}(x) - \sum_1^m{}_j\, c_j\, \psi_j'(x) \right]^2 dx = 0\,, \tag{12}$$

ed alla quale compete [2] la rappresentazione

$$\bar{\eta}(x) = \mathrm{T}_1(x) + \sum\nolimits_\nu [\mathrm{T}_{\nu+1}(x) - \mathrm{T}_\nu(x)]\,, \tag{13}$$

(1) Cfr. C. Severini, loc. cit. (3), § 9.
(2) Cfr. C. Severini, loc. cit. (3), § 9.

ove $T_\nu(x)$ ha il significato dianzi detto; ed anche l'altra:

(14) $$\overline{\eta}(x) = \sum_j c_j \psi'_j(x) \quad , \quad c_j = \int_a^b \eta(x)\, \psi'_j(x)\, dx ,$$

se il sistema (6) è composto di un numero finito di funzioni, ovvero converge la serie $\sum_j c_j \psi'_j(x)$.

Ma si ha, da un canto:

$$\int_a^b \overline{\eta}(x)\, \psi'_j(x)\, dx = c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

donde

(15) $$\int_a^b [\eta(x) - \overline{\eta}(x)]\, \psi'_j(x)\, dx = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

e, d'altro canto:

$$\int_a^b \overline{\eta}(x)\, \psi_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

e quindi

(16) $$\int_a^b [\eta(x) - \overline{\eta}(x)]\, \psi_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

La (15) e la (16), essendo il sistema formato dalle (3) e dalle (6) chiuso, ci dànno:

$$\eta(x) = \overline{\eta}(x) ,$$

e però dalla (13) segue la (9), e, quando ne sia il caso, dalla (14) la (11).

Viceversa, se si coordina alle funzioni (6) una qualsivoglia successione di numeri:

$$d_1, d_2, \ldots d_j, \ldots$$

tali che, se le (6) non sono in numero finito, converga la serie

(17) $$\sum_j d_j^2 ,$$

e s'indica con $\eta'(x)$ la funzione alla quale converge in media la successione

$$\mathrm{S}'_m(x) = \sum_1^m {}_j\, d_j\, \psi'_j(x) , \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

si trova, come precedentemente:

$$\int_a^b \eta'(x)\, \psi_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

e per conseguenza la funzione $\eta'(x)$ è una soluzione delle equazioni integrali (7), per la quale si ha:

(18) $$\eta'(x) = \mathrm{T}'_1(x) + \sum_\nu [\mathrm{T}'_{\nu+1}(x) - \mathrm{T}'_\nu(x)] ,$$

in cui

$$\mathrm{T}'_\nu(x) = \sum_j \frac{d_j}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} \psi'_j(x)\, dx \qquad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

ed anche:

$$\eta'(x) = \sum_j d_j\, \psi'_j(x), \tag{19}$$

se le (6) sono in numero infinito, ovvero la serie $\sum_j d_j\, \psi'_j(x)$ è convergente.

Da quanto è stato dianzi detto si ricava il seguente risultato:

Se il sistema delle funzioni ortogonali (3) *non è chiuso, la soluzione generale delle equazioni integrali* (7), *o, ciò che è lo stesso, dell'equazione* (8), *è rappresentata dalla serie* (18), *ove le d_j sono costanti arbitrarie, soggette, quando non sono in numero finito, alla condizione che converga la serie dei loro quadrati. Nel caso che le* (6) *siano in numero finito, la detta soluzione generale è anche rappresentata dalla* (19).

2. Dalle considerazioni del § precedente segue l'unicità del sistema complementare di un dato sistema non chiuso di funzioni ortogonali, nel senso che, trovato un sistema complementare, ogni altro sistema complementare, o meglio ogni altra soluzione effettiva delle corrispondenti equazioni integrali, si può, come è stato detto, da quello dedurre (¹). L'osservazione presenta specialmente interesse nel caso che esista un sistema complementare finito, nel qual caso, esprimendosi le soluzioni delle dette equazioni linearmente ed omogeneamente per mezzo delle funzioni di questo sistema, si deduce che il numero delle funzioni componenti un sistema complementare è costante, non dipende cioè dal modo col quale il sistema complementare viene realizzato.

Riferendoci al sistema (3), e detto p il numero (supposto finito) delle (6), se potesse esistere un altro sistema complementare

$$\psi''_1(x), \psi''_2(x), \ldots, \psi''_r(x), \ldots, \tag{20}$$

contenente più di p funzioni, si potrebbero scrivere $p+1$ relazioni della forma:

$$\psi''_r(x) = \sum_1^p{}_j\, c_{jr}\, \psi'_j(x) \quad , \quad c_{jr} = \int_a^b \psi''_r(x)\, \psi'_j(x)\, dx\,, \tag{21}$$

dalle quali, eliminando le (6), si dedurrebbe una relazione almeno, lineare, omogenea, a coefficienti costanti, fra le (20): il che è impossibile, essendo le (20) fra loro ortogonali.

Analogamente si prova che non possono le (20) essere in numero minore di p.

(¹) Cfr. G. Lauricella, *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali*, Rendic. della R. Accad. dei Lincei (Roma), vol. XXI, serie 5ª, 1° sem. 1912.

Nel caso che il sistema complementare (6) sia finito, abbiamo visto che la soluzione generale delle equazioni (7) è rappresentata dalla (19), e dipende linearmente ed omogeneamente da un numero finito di costanti arbitrarie. È facile vedere che sussiste la proprietà inversa. Si ammetta, infatti, che la soluzione generale delle (7) sia rappresentata da

$$\sum_1^p {}_r\, d'_r\, g_r(x)\,, \tag{22}$$

ove le d'_r sono costanti arbitrarie, e quante si vogliano delle funzioni

$$g_r(x) \qquad (r=1\,,2\,,\ldots,p)\,, \tag{23}$$

che si intendono sommabili insieme coi loro quadrati, comunque scelte, risultano sempre linearmente indipendenti. La medesima soluzione generale sarà anche rappresentata da

$$\sum_1^p {}_s\, d''_s\, h_s(x)\,,$$

le funzioni

$$h_s(x) \qquad (s=1\,,2\,,\ldots,p)\,, \tag{24}$$

essendo dedotte dalle (23) mediante ortogonalizzazione ([1]); ed è bene evidente che il sistema (24) è complementare per il sistema (3).

Da quanto precede, si ricava il seguente risultato:

Se il sistema delle funzioni ortogonali (3) *non è chiuso, affinchè la soluzione generale delle equazioni integrali* (7), *cioè dell'equazione* (8), *sia rappresentata da una espressione della forma* (22), *ove le* $g_r(x)$ *soddisfano alle condizioni sopra dette, e dipenda quindi linearmente ed omogeneamente da un numero finito di costanti arbitrarle* d'_r, *è necessario e sufficiente che il sistema delle funzioni ortogonali* (3) *ammetta un sistema complementare finito. Il numero delle costanti arbitrarie è allora fisso, ed eguale al numero delle funzioni componenti un sistema complementare.*

3. Dal risultato del § 1, e da quanto è stato detto nella Nota I ([2]), segue per l'equazione integrale di prima specie (1) quest'altro teorema:

Supposte verificate le condizioni occorrenti, indicate nella Nota I (§§ 1 e 2), *se il sistema delle funzioni ortogonali* (3) *non è chiuso, e con*

$$\psi'_1(x)\,,\psi'_2(x)\,,\ldots,\psi'_j(x)\,,\ldots \tag{6}$$

([1]) Cfr. E. Goursat, *Recherches sur les équations intégrales linéaires*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, IIe série, tome X (1908), pp. 5-98, pag. 50.

([2]) Loc. cit. ([1]).

s'indica un suo sistema complementare, la soluzione generale della (1) *è rappresentata dalla serie*

$$W'_1(x) + \sum_\nu [W'_{\nu+1}(x) - W'_\nu(x)],$$

ove

$$W'_\nu(x) = \sum_n \frac{1}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} [\lambda_n\, a_n\, \psi_n(x) + d_n\, \psi'_n(x)]\, dx\,,$$

$$a_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx\,,$$

le

$$d_1\,, d_2\,, \ldots, d_j\,, \ldots$$

essendo costanti arbitrarie, soggette, quando non sono in numero finito, alla condizione che converga la serie dei loro quadrati, e le

$$h_1\,, h_2\,, \ldots, h_n\,, \ldots$$

quantità positive, comunque scelte, decrescenti, tendenti a zero.

Nel caso che le (6) *siano in numero finito, la detta soluzione generale è anche rappresentata dalla serie*

$$U_1(x) + \sum_\nu [U_{\nu+1}(x) - U_\nu(x)] + \sum_j d_j\, \psi'_j(x)\,,$$

ove

$$U_\nu(x) = \sum_n \frac{\lambda_n\, a_n}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} \psi_n(x)\, dx\,.$$

In fine, se il sistema delle funzioni ortogonali (3) *è chiuso, l'unica soluzione della* (1), *sommabile insieme col suo quadrato, è data dalla serie*

$$U_1(x) + \sum_\nu [U_{\nu+1}(x) - U_\nu(x)]\,. \tag{25}$$

4. La condizione caratteristica, per le equazioni integrali di prima specie (1), le cui soluzioni generali dipendono linearmente da un numero finito di costanti arbitrarie, è fornita dal risultato del § 2. Il teorema che se ne ricava è il seguente:

Sotto le condizioni dei teoremi enunciati nella Nota I (§§ 1 e 2), *l'equazione* (1) *ammette un'unica soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, se il sistema delle funzioni ortogonali* (3) *è chiuso; e viceversa. Se questo sistema non è chiuso, affinchè la soluzione generale della* (1) *sia rappresentata da una serie, ottenuta aggiungendo alla serie* (25) *una espressione della forma* (22), *ove le* $g_r(x)$ *soddisfano alle condizioni sopra dette, e dipenda quindi linearmente da un numero finito di costanti arbitrarie* d'_r, *è necessario e sufficiente che il sistema delle funzioni ortogonali* (3) *ammetta un sistema complementare finito. Il numero delle costanti arbitrarie è allora fisso ed eguale al numero delle funzioni, componenti un sistema complementare.*

4. Le considerazioni dianzi svolte si applicano con vantaggio nella ricerca delle funzioni permutabili di seconda specie con una funzione data. Di ciò mi propongo di occuparmi in una prossima Nota.