ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Fisica. — *Sull'uso dei reticoli concavi di diffrazione collo spettrometro.* Nota II di G. Guglielmo, presentata dal Socio Pietro Blaserna.

Sebbene non abbia fatto finora uno studio teorico completo della disposizione precedentemente descritta, (nella quale i raggi luminosi emergenti dal reticolo e formanti uno spettro hanno in media la stessa direzione dei raggi incidenti) pure nel caso di un punto luminoso e di raggi giacenti in un piano perpendicolare alla superficie del reticolo, ed alle sue righe è risultato che la condizione di uguaglianza fra l'angolo d'incidenza e quello d'emergenza dei raggi è favorevole alla produzione d'uno spettro nitido.

In conformità della teoria dei reticoli concavi, quale viene esposta dal Kayser (*Handbuch der Spectroscopie*, Bd. I), dal Battelli e Cardani (*Trattato di fisica*, vol. II), siano OX ed OY i due assi cartesiani nel cui piano, e su OX, si trovi il centro della superficie del reticolo; sia ROR' la traccia del reticolo, che ha le linee perpendicolari al piano XOY; siano $P(a, b)$ e $P'(a', b')$ il punto luminoso ed un punto in cui le onde, emesse da P e riflesse o diffratte dal reticolo, arrivino concordanti; siano, inoltre, $M(x, y)$ ed $M_1(x_1, y_1)$ due punti omologhi in due strisce riflettenti successive dimodochè sia $y - y_1 = s$ la lunghezza dell'elemento del reticolo, e si ponga anche $y - y_1 = \delta y$ e $PM + P'M = S$, $PM_1 + P'M_1 = S + \delta S$. La condizione di concordanza delle onde provenienti da M ed M_1 può scriversi:

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial . PM}{\partial y} + \frac{\partial . PM'}{\partial y} \right) s = m\lambda,$$

essendo

$$\overline{PM}^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 \quad , \quad \overline{PM'}^2 = (a' - x)^2 + (b' - y)^2;$$

ossia, ponendo $a^2 + b^2 = p^2$, $a'^2 + b'^2 = p'^2$:

$$\overline{PM}^2 = p^2 - 2by - 2ax + x^2 + y^2 \quad , \quad \overline{PM'}^2 = p'^2 - 2b'y - 2a'x + x^2 + y^2.$$

Se si suppone che sia $x = 0$, cioè che il reticolo sia piano, si ha:

$$\overline{PM}^2 = \left(p - \frac{b}{p} y\right)^2 + \frac{a^2}{p^2} y^2 \quad , \quad \overline{PM'}^2 = \left(p' - \frac{b}{p'} y\right) + \frac{a'^2}{p'^2} y^2;$$

ed estraendo per approssimazione la radice quadrata e, nel coefficiente di y^2 trascurando by/p rispetto a p si avrà:

$$PM = p - \frac{b}{p} y + \frac{a^2}{2p^3} y^2 \quad , \quad PM' = p' - \frac{b'}{p'} y + \frac{a'^2}{2p'^3} y^2,$$

e la condizione di concordanza diviene:

$$\left(\frac{b}{p}+\frac{b'}{p'}\right)s-\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{a'^2}{p'^3}\right)ys=m\lambda,$$

che, per essere soddisfatta per ogni valore di y, richiede che sia:

$$\frac{b}{p}+\frac{b'}{p'}=\frac{m\lambda}{s}\quad,\quad\frac{a^2}{p^3}+\frac{a'^2}{p'^3}=0,$$

cioè, se i ed e sono gli angoli d'incidenza POX e d'emergenza P'OX,

(1) $\operatorname{sen} i+\operatorname{sen} e=m\lambda/s\quad,\quad\cos^2 i/p+\cos^2 e/p'=0.$ (2)

Se di x, che è sempre piccolissimo rispetto ad y (mentre y lo è rispetto ad a e b), si tien conto della sola 1ª potenza, siccome si ha $x^2+y^2=2\mathrm{R}x$, equazione della circonferenza ROR', e, quindi, $(x^2+y^2)\,a/\mathrm{R}=2ax$, ossia $2ax=ay^2/\mathrm{R}$, si avrà, sostituendo,

$$\overline{\mathrm{PM}}^2=\left(p-\frac{b}{p}y\right)^2+\left(\frac{a^2}{p^2}-\frac{a}{\mathrm{R}}\right)y^2\ ,\ \mathrm{PM}=p-\frac{b}{p}y+\left(\frac{a^2}{p^2}-\frac{a}{\mathrm{R}}\right)\frac{y^2}{2p}),$$

e la condizione di concordanza delle onde diviene,

$$\left(\frac{b}{p}+\frac{b'}{p'}\right)s-\left[\left(\frac{a^2}{p^2}-\frac{a}{\mathrm{R}}\right)/p+\left(\frac{a'^2}{p'^2}-\frac{a'}{\mathrm{R}}\right)/p'\right]ys=m\lambda,$$

che, per esser soddisfatta, richiede che sia:

$$\frac{b}{p}+\frac{b'}{p'}=\frac{m\lambda}{s}\quad,\quad\left(\frac{a^2}{p^2}-\frac{a}{\mathrm{R}}\right)/p+\left(\frac{a'^2}{p'^2}-\frac{a'}{\mathrm{R}}\right)/p'=0,$$

ossia: $\operatorname{sen} i+\operatorname{sen} e=\dfrac{m\lambda}{s}$,

(3) $$\frac{\cos^2 i}{p}+\frac{\cos^2 e}{p'}=\frac{\cos i+\cos e}{\mathrm{R}}\ ,\ \frac{1}{p}\frac{\mathrm{R}\cos^2 i}{\cos i+\cos e}+\frac{1}{p'}\frac{\mathrm{R}\cos^2 e}{\cos i+\cos e}=1.$$

La relazione (3) può dedursi dalla (1), tenendo conto della curvatura dell'arco ROR'. Difatti, dalla (1) si ricava, per m e λ costanti,

$$\partial i/\partial e=-\cos e/\cos i;$$

inoltre, se si indicano con θ, θ', ε, gli angoli che con una retta fissa qualsiasi (p. es., la OY) fanno i raggi incidente ed emergente, e la normale nel punto d'incidenza (dalla parte del centro), per evidenti ragioni geometriche si ha: $di=d\theta-d\varepsilon$, $de=d\theta'-d\varepsilon$; e siccome dai triangoletti elementari, che hanno per base $\mathrm{R}d\varepsilon$, si ricava $pd\theta=\mathrm{R}d\varepsilon\cos i$, $p'd\theta'=\mathrm{R}d\varepsilon\cos e$, sostituendo questi valori di $d\theta$ e $d\theta'$ in quelli di di e de si ricava appunto la (3).

La relazione (1) dà, con sen e, la direzione in cui si forma, per determinati valori di i, m e λ, l'immagine colorata del punto luminoso; la (3) è della forma solita:

$$\frac{A}{p}+\frac{B}{p'}=1,$$

dove A e B, le distanze focali principali, sono costanti per determinati valori di i, m, λ (e, quindi, anche di e); essa, data la distanza del punto luminoso, dà quella della sua immagine. Allo stesso scopo può servire la solita semplice costruzione geometrica; segnato il punto di coordinate A, B, ogni retta passante per esso taglia, sugli assi, due segmenti: e se uno di questi è lungo p, l'altro sarà lungo p'. È però da notare che A e B sono costanti condizionalmente e che variano (come varia e) al variare di i e di m.

La relazione (3) diviene, come è noto, molto semplice se $p = R\cos i$, cioè se il punto luminoso è sulla circonferenza costruita sul raggio OC del reticolo come diametro, perchè in tal caso la (3) si riduce a $p' = R\cos e$: quindi l'immagine del punto luminoso, qualunque siano i ed m e λ, si forma sulla stessa circonferenza. La stessa relazione notevolmente si semplifica anche se si fa $i = e$, poichè essendo per la (1) $\lambda = 2s$ sen i/m diviene

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{R\cos i/2};$$

Per $p=\infty$, p' diviene $R\cos i/2$; cioè, l'immagine diffratta del punto luminoso all'infinito si forma, nella direzione dei raggi incidenti, sulla circonferenza tangente al reticolo e di raggio R/4. Se $p = R\cos i/2$ e $p'=\infty$, ritengo che lo spettro formantesi a distanza infinita sia perpendicolare alla direzione dei raggi, e lo siamo quindi anche le sue immagini prodotte da un obbiettivo, o da uno specchio concavo, o da un cannocchiale. Rimarebbe quindi evitato il principale o forse unico inconveniente di questa disposizione, l'obliquità degli spettri rispetto ai raggi che li producono.

Se i e p sono costanti, le immagini del punto luminoso corrispondenti ai diversi valori di λ e di m, cioè i varii spettri, si formano sopra una curva di 6° ordine, la cui natura e proprietà non ho ancora considerate.

Finalmente, se nella suddetta condizione di concordanza delle onde nel punto P′ si tiene conto anche della 2ª potenza di x, si ha:

$$\overline{PM}^2 = p^2 - 2by + y^2\left(1-\frac{a}{R}\right) + x^2\left(1-\frac{a}{R}\right)$$
$$= \left(p-\frac{b}{p}y\right)^2 + y^2\left(\frac{a^2}{p^2}-\frac{a}{R}\right) + x^2\left(1-\frac{a}{R}\right);$$

ed estraendo nel modo solito la radice quadrata, per approssimazione, si ha:

$$PM = p - \frac{b}{p}y + \frac{y^2}{2p}\left(\frac{a^2}{p^2} - \frac{a}{R}\right) + \frac{x^2}{2p}\left(1 - \frac{a}{R}\right).$$

Se il punto luminoso si trova sulla suddetta circonferenza avente per diametro il raggio mediano del reticolo, si ha: $p^2 = aR$, $a/R = a^2/p^2$, $(1 - a/R) = b^2/p^2$ come trovasi nei suddetti trattati; ed il termine in x^2, precedentemente trascurato, diviene

$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{b^2}{p^3} + \frac{b'^2}{p'^3}\right) \text{ o anche } \frac{x^2}{2R}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 i}{\cos i} + \frac{\operatorname{sen}^2 e}{\cos e}\right),$$

che ha diversi valori a seconda del valore di i e, quindi, di e.

Uguagliando a zero la derivata del fattore tra parentesi (rammentando che $de/di = -\cos i/\cos e$), si trova, come condizione di minimo,

$$\frac{\operatorname{sen} i(1 + \cos^2 i)}{\cos^3 i} = \frac{\operatorname{sen} e(1 + \cos^2 e)}{\cos^3 e}.$$

che è soddisfatto per $i = e$.

Per assicurarsi che tale condizione non indichi invece un massimo del suddetto fattore, si osservi, coll'oculare diretto normalmente al reticolo, cioè per $e = 0$, una certa riga (e sia p. es. $i = 45°$; e quindi $\operatorname{sen} i = \cos i = 0{,}7$, $\lambda = 0{,}7s/m$); sarà:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 i}{\cos i} + \frac{\operatorname{sen}^2 e}{\cos e} = 1{,}4.$$

Ora si collochi l'oculare accanto alla fessura, diretto verso il reticolo, e si sposti la fessura coll'oculare, finchè nel campo di questo appaia la stessa riga dello stesso spettro di prima; sarà

$$i = e \ , \ 2 \operatorname{sen} i = 2 \operatorname{sen} e = (m/s)\,(0{,}7s/m) = 1{,}4,$$

quindi

$$\operatorname{sen} i = \operatorname{sen} e = 0{,}35 \ , \ \operatorname{sen}^2 i = \operatorname{sen}^2 e = 0{,}12 \ , \ \cos^2 i = \cos^2 e = 0{,}88,$$

$$\cos i = \cos e = 0{,}94,$$

e sarà, quindi,

$$\frac{\operatorname{sen}^2 i}{\cos i} + \frac{\operatorname{sen}^2 e}{\cos e} = 2\,\frac{\operatorname{sen}^2 i}{\cos i} = \frac{0{,}24}{0{,}94} = 0{,}25,$$

valore notevolmente minore di quello ottenuto per $e = 0$.

Quindi da questo ragionamento (poco rigoroso, per effetto della estraziene approssimata di radice) risulterebbe che la condizione di concordanza delle onde è soddisfatta più esattamente nel caso di $e = i$, nel caso, cioè, che l'immagine del punto luminoso coincida con questo.