ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 marzo 1914.

F. D'OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. La teoria delle trasformazioni B_k per le superficie applicabili sulle quadriche generali, quale trovasi esposta nel terzo volume delle mie *Lezioni di geometria differenziale*, costituisce (come ormai può dirsi ben confermato dalle ricerche più recenti) la più naturale e completa estensione delle trasformazioni di Bäcklund per le superficie a curvatura costante, positiva o negativa. Ma nella teoria di queste ultime superficie (deformate della sfera reale od immaginaria) vi ha un altro interessante capitolo: quello che tratta delle *famiglie di Lamé* costituite di tali superficie, al quale fino ad ora non ne corrispondeva uno analogo per le deformate delle quadriche generali.

La questione che si presentava spontanea, cogli ultimi studî, era di ricercare se colle deformate delle quadriche generali si possano comporre delle famiglie di superficie, le quali, per le loro proprietà, siano da riguardarsi come la naturale estensione delle famiglie di Lamé di superficie a curvatura costante. Dopo alcuni tentativi diretti ad ottenere la generalizzazione richiesta, ho riconosciuto che essa deve opportunamente cercarsi nella teoria dei *sistemi tripli coniugati* di Darboux (¹), cioè di quei sistemi

(¹) Ved. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IV^{ème} part., nn. 1047-1052; e *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, livre III, chap. III (2ème ed., 1910).

tripli di superficie nei quali ciascuna superficie viene intersecata dalle superficie delle altre due famiglie secondo le linee di un sistema coniugato.

Si vede, invero, che colle deformate di qualunque quadrica si possono costruire, ed in grande arbitrarietà, famiglie di tali superficie applicabili sulla medesima quadrica, o, più in generale, su quadriche differenti, e che appartengono a sistemi tripli coniugati dotati di particolari proprietà, che sono la naturale estensione di quelle ben note per le famiglie di Lamé a curvatura costante. Precisiamo le accennate proprietà supponendo che nel sistema triplo coniugato

$$u = \text{cost} \quad , \quad v = \text{cost} \quad , \quad w = \text{cost} ,$$

le superficie $w = \text{cost}$ siano quelle applicabili sopra quadriche; allora abbiamo:

1°) *La corrispondenza segnata su due qualunque superficie* $w = \text{cost}$ *dalle linee* (w), *intersezioni delle altre due famiglie, conserva i sistemi coniugati.*

2°) *Il sistema coniugato* (u, v), *intercettato sopra ciascuna* $w = \text{cost}$ *dalle superficie delle altre due famiglie, è quello coniugato permanente (cioè quello che si conserva coniugato applicando la* $w = \text{cost}$ *sulla corrispondente quadrica).*

Allorquando le quadriche Q, su cui sono applicabili le $w = \text{cost}$, si suppongono altrettante sfere (reali od immaginarie), il sistema coniugato permanente è quello *ortogonale* delle linee di curvatura, ed il sistema triplo coniugato diventa un sistema triplo ortogonale.

Rispetto alle trasformazioni B_k della teoria generale per le deformate delle quadriche, i sistemi tripli coniugati ora considerati si comportano precisamente come i sistemi tripli ortogonali di superficie a curvatura costante rispetto alle trasformazioni di Bäcklund, sussistendo la proprietà seguente:

Da ogni sistema triplo coniugato, con una famiglia di deformate di quadriche, le trasformazioni B_k *fanno derivare infiniti altri sistemi della stessa specie, le cui singole superficie della nuova famiglia sono legate alle corrispondenti dell'antica da una trasformazione* B_k. *La trasformazione per l'intera famiglia è individuata quando si fissi, del resto ad arbitrio, per una singola superficie della famiglia.*

Aggiungo, in fine, che anche per le trasformazioni B_k dei nostri sistemi tripli coniugati vale il *teorema di permutabilità*, dal quale risultano, per l'applicazione ripetuta del processo di trasformazione, le solite semplificazioni.

2. Non è mio proposito, nè sarebbe possibile in una breve Nota preliminare, entrare negli effettivi sviluppi relativi al caso generale. Soltanto dirò che la costruzione dei nuovi sistemi tripli coniugati si può ottenere dalla ripetizione continua di *trasformazioni infinitesimali*, seguendo i con-

cetti che ho avuto occasione di esporre in un recente lavoro [1]. La natura di queste trasformazioni infinitesime, che diremo T_ε, risulta dalle considerazioni seguenti:

Sopra una superficie S, applicabile sopra una quadrica Q, consideriamo il sistema coniugato permanente (u, v). Ogni punto P di S riceva uno spostamento infinitesimo che lo porti in un punto corrispondente P', per modo che:

1°) *la superficie* S', *luogo di* P', *sia applicabile alla sua volta sulla stessa quadrica* Q, *ovvero sopra un'altra (infinitamente poco diversa)*;

2°) *ad ogni sistema coniugato sopra* S *corrisponda un sistema coniugato sopra* S';

3°) *le sviluppabili della congruenza formata dalle congiungenti* PP' *i punti corrispondenti, taglino tanto* S *quanto* S' *nelle linee del sistema coniugato permanente.*

Se queste condizioni sono soddisfatte, il passaggio da S ad S' si dirà una *trasformazione infinitesima* T_ε della S.

Ora si riconosce che, per qualunque superficie S, deformata di una quadrica, esistono infinite tali trasformazioni infinitesime *dipendenti da costanti arbitrarie.* Mediante una successione *continua* di trasformazioni infinitesime T_ε, vengono a generarsi i nostri sistemi tripli coniugati, precisamente come la costruzione infinitesimale di Weingarten per le superficie a curvatura costante, ripetuta in modo continuo, dà luogo ai sistemi tripli ortogonali con una famiglia di queste superficie.

Qui consideriamo una classe *particolare* di trasformazioni infinitesime T_ε, ma che esistono per qualunque superficie S deformata di una quadrica. Per ciò applichiamo alla S una trasformazione B_k *singolare*, corrispondente adunque ad una conica focale Γ, e sia S_1 una delle superficie trasformate. La medesima trasformazione singolare B_k, applicata alla S_1, dà luogo ad una serie ∞^1 di trasformate, tra le quali vi ha la S stessa. Diciamo S' la superficie di questa serie successiva alla S; il passaggio dalla S alla S' avviene appunto per una T_ε, giacchè tutte le condizioni sopra enumerate sono qui soddisfatte, colla ulteriore particolarità che S, S' sono applicabili sulla medesima quadrica. Ogni superficie S ammette ∞^1 di tali trasformazioni infinitesime T_ε, poichè, data la S, la S_1 resta arbitraria in una serie ∞^1. Per le ∞^1 trasformazioni infinitesime T_ε ogni punto P di S riceve ∞^1 spostamenti, le cui direzioni formano un cono col vertice in P, che è facile di caratterizzare geometricamente. Per questo, basta ricorrere alla legge di affinità di Ivory e immaginare che la quadrica Q, rotolando sulla superficie applicabile S, venga a toccarla in P; allora si vede che:

[1] Ved. la prefazione alla Memoria: *Sulla teoria delle trasformazioni delle curve di Bertrand e delle superficie pseudosferiche*, Memorie della Società dei XL, serie 3ª, tomo 18 (1913).

Gli spostamenti impressi dalle ∞^1 trasformazioni infinitesime T_ε *od un punto* P *della* S, *avvengono secondo le generatrici del cono quadrico che projetta da* P *la conica focale* Γ, *nella posizione che questa acquista dopo il rotolamento.*

È bene evidente che le particolari trasformazioni infinitesime T_ε qui considerate, generano sistemi tripli coniugati, nei quali le superficie di una famiglia sono tutte applicabili *sulla medesima quadrica.*

3. Come ho sopra accennato, la trattazione analitica dei nostri sistemi tripli coniugati, in generale, richiede ulteriori considerazioni e sviluppi di calcolo, che sono da riservarsi a più ampia pubblicazione. Nella presente Nota mi limiterò a considerare tre casi più semplici, nei quali l'esistenza dei sistemi tripli coniugati e le formole relative si deducono facilmente dalle famiglie di Lamé di superficie a curvatura costante, dalle quali vengono a dipendere in modo geometrico assai semplice.

Il primo dei casi che vogliamo considerare è quello dei sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie deformate di *quadriche di rotazione.* Nelle mie ricerche del 1899 sulla inversione dei teoremi di Guichard [1] ho dimostrato (al cap. IV, Mem. cit.) che ai sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie costante, positiva o negativa, sono applicabili quelle trasformazioni *reali* composte di due trasformazioni opposte di Bäcklund, reali o puramente immaginarie, che nascono dalla inversione dei teoremi di Guichard.

Siano (Σ), (Σ') due tali famiglie di Lamé di superficie a curvatura costante K, potendo K essere una costante assoluta, ovvero variabile colla superficie nella famiglia. Si sa che le normali a due superficie corrispondenti Σ, Σ', in una coppia qualunque P, P' di punti corrispondenti, si incontrano in un punto P_0 equidistante da P, P'; e se si fa variare la coppia (P, P') sulle due superficie Σ, Σ', il punto P_0 descrive una deformata S_0 di una quadrica di rotazione, ed alle linee di curvatura di (Σ, Σ') corrisponde sopra S_0 il sistema coniugato permanente. Se facciamo variare Σ nella famiglia (Σ) [corrispondentemente Σ' in (Σ')], la S_0 descriverà alla sua volta una famiglia (S_0) di superficie applicabili sopra quadriche rotonde; queste quadriche coincideranno se K è una costante assoluta, e saranno invece diverse per K variabile. Ora si verifica che:

La famiglia (S_0) *di deformate delle quadriche rotonde appartiene appunto ad uno dei nostri sistemi tripli coniugati.*

Nel caso attuale è anche facile riconoscere l'esistenza delle trasformazioni B_k per le famiglie (S_0) (cfr. n. 1). E infatti, con una trasformazione arbitraria di Bäcklund, la coppia (Σ), (Σ') di famiglie di Lamé si cangia

[1] Ved. la Memoria, *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante*, Annali di matematica, ser. 3ª, tom. III.

in un'altra coppia che diciamo $(\overline{\Sigma})$, $(\overline{\Sigma}')$ nelle medesime condizioni. Questa ultima determina alla sua volta una nuova famiglia $(\overline{S}_0)$ di deformate delle medesime quadriche rotonde, appartenente ad un triplo coniugato; ed ora sussiste la proprietà:

Le singole superficie S_0, $\overline{S}_0$, *corrispondenti nelle due famiglie* (S_0), $(\overline{S}_0)$, *sono trasformate l'una dell'altra per una* B_k.

4. Diamo ora le formole effettive per questi sistemi tripli coniugati con una famiglia (S_0) di deformate di quadriche rotonde.

Per questo, partiamo da un sistema triplo ortogonale (u, v, w) nel quale le $w = \text{cost}$ siano a curvatura costante K, dove K sarà, in generale, variabile con w. Per fissare le idee, prendiamo p. es. il caso di K positiva

$$K = \frac{1}{R^2}\quad,\quad R = R(w)\,,$$

e riferiamoci alla nota forma dell'elemento lineare dello spazio

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2 + R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2\,, \tag{1}$$

dove $\theta = \theta(u, v, w)$ dovrà soddisfare al corrispondente sistema di equazioni a derivate parziali (di Lamé), che qui per brevità omettiamo di scrivere.

Si sa che le trasformazioni del sistema triplo ortogonale (u, v, w), di cui è parola al n. precd., dipendono da un sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali in una quaderna

$$\Phi\,,\ \varLambda\,,\ M\,,\ W$$

di funzioni incognite di u, v, w, che si scrive:

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \operatorname{senh}\theta\,.\,\varLambda\quad,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial v} = \cosh\theta\, M\quad,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial w} = R\frac{\partial\theta}{\partial w}\cdot W\\
&\frac{\partial\varLambda}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}M + c\operatorname{senh}\theta\,.\,\Phi - \frac{cR^2+1}{R}\cosh\theta\,.\,W\,,\\
&\qquad\qquad \frac{\partial\varLambda}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u}M\quad,\quad \frac{\partial\varLambda}{\partial w} = \frac{R}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\cdot W\\
&\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v}\varLambda\,,\quad \frac{\partial M}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u}\varLambda + c\cosh\theta\,.\,\Phi - \frac{cR^2+1}{R}\operatorname{senh}\theta\,.\,W\,,\\
&\qquad\qquad \frac{\partial M}{\partial w} = \frac{R}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cdot W\\
&\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\cosh\theta}{R}\varLambda\quad,\quad \frac{\partial W}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\theta}{R}M\,,\\
&(cR^2+1)\frac{\partial W}{\partial v} = -\,cRR'\,.\,W + cR\frac{\partial\theta}{\partial w}\cdot W - \frac{R}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\varLambda -\\
&\qquad\qquad -\frac{R}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cdot M\,,
\end{aligned}\right.$$

dove c è una costante arbitraria, e si è posto

$$R' = \frac{dR}{dw}.$$

Il sistema (a) è illimitatamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$(2) \qquad \mathit{\Lambda}^2 + M^2 - c\Phi^2 + (cR^2 + 1)\,W^2 = \text{cost};$$

e noi assumiamo la quaderna $(\Phi, \mathit{\Lambda}, M, W)$ di soluzioni per modo che la costante nel secondo membro della (2) sia nulla, e si abbia quindi identicamente

$$(2^*) \qquad \mathit{\Lambda}^2 + M^2 - c\Phi^2 + (cR^2 + 1)\,W^2 = 0.$$

Una tale quaderna $(\Phi, \mathit{\Lambda}, M, W)$ fissa appunto una delle indicate trasformazioni; ma a noi qui interessa soltanto di scrivere le formole che assegnano le corrispondenti superficie S_0 applicabili sopra quadriche rotonde (ellissoide allungato, ovvero iperboloide a due falde). Indicando con (x, y, z) un punto qualunque (u, v, w) dello spazio, con X_3, Y_3, Z_3 i coseni della direzione principale (w), e con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto corrispondente di S_0, abbiamo

$$(3) \qquad x_0 = x - \frac{\Phi}{W} X_3, \quad y_0 = y - \frac{\Phi}{W} Y_3, \quad z_0 = z - \frac{\Phi}{W} Z_3.$$

Verifichiamo che queste definiscono in effetto un sistema triplo coniugato (u, v, w), chè le altre proprietà descritte al n. 1 ne seguono immediatamente.

5. Per dimostrare che le (3) definiscono un sistema triplo coniugato bisogna provare (Darboux, loc. cit.) che x_0, y_0, z_0 sono tre soluzioni di un sistema simultaneo di equazioni (di Laplace) della forma

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} &= \frac{\partial \log H_1}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \log H_2}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial v\, \partial w} &= \frac{\partial \log H_2}{\partial w} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \log H_3}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial w} &= \frac{\partial \log H_3}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial \log H_1}{\partial w} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \end{aligned} \right.$$

ove H_1, H_2, H_3 sono tre convenienti funzioni.

Per questo si comincino a formare le derivate prime, rapporto ad u, v, w, delle (3), tenendo conto delle formole (a), e delle equazioni a cui soddisfano i coseni

$$(X_1, Y_1, Z_1) \quad , \quad (X_2, Y_2, Z_2) \quad , \quad (X_3, Y_3, Z_3)$$

delle tre direzioni principali nel sistema triplo ortogonale (1). Si trovano così le seguenti formole:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial x_0}{\partial u} &= \frac{\mathrm{RW}\operatorname{senh}\theta - \Phi\cosh\theta}{\mathrm{RW}^2}(\mathrm{WX}_1 - \varDelta\mathrm{X}_3)\\ \frac{\partial x_0}{\partial v} &= \frac{\mathrm{RW}\cosh\theta - \Phi\operatorname{senh}\theta}{\mathrm{RW}^2}(\mathrm{WX}_2 - \mathrm{MX}_3)\\ \frac{\partial x_0}{\partial w} &= \frac{\Phi}{\mathrm{W}}\left\{\frac{\mathrm{R}}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\mathrm{X}_1 + \frac{\mathrm{R}}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\mathrm{X}_2 + \frac{\partial\log\mathrm{W}}{\partial w}\mathrm{X}_3\right\},\end{aligned}\right.$$

colle analoghe per y_0, z_0.

Dopo ciò, se si calcolano le derivate seconde (miste) di

$$x_0, y_0, z_0,$$

si vede che queste sono, in effetto, tre soluzioni di un sistema (α), quando $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3$ si assumano dati da

$$\mathrm{H}_1 = \operatorname{senh}\theta - \frac{\Phi}{\mathrm{RW}}\cosh\theta \quad , \quad \mathrm{H}_2 = \cosh\theta - \frac{\Phi}{\mathrm{RW}}\operatorname{senh}\theta \quad , \quad \mathrm{H}_3 = \frac{\Phi}{\mathrm{W}}.$$

Dunque: *le formole* (3) *definiscono un sistema triplo coniugato*, c. d. d.

6. La seconda classe di sistemi tripli coniugati, con una famiglia di deformate di quadriche, che vogliamo considerare, si ottiene molto più semplicemente dalle famiglie di Lamé a curvatura costante con una costruzione *in termini finiti*. Le quadriche di cui qui si tratta, sono le quadriche immaginarie (osculanti l'assoluto) di equazione

$$y^2 + z^2 + (x - y + iz)^2 = \frac{1}{\mathrm{K}} \text{ (K costante).} \tag{4}$$

Al § 447 delle *Lezioni* è ottenuta l'accennata costruzione per le superficie *reali* applicabili sulle quadriche immaginarie (4) appunto partendo dalle famiglie di Lamé a curvatura costante. Ora, colle nuove nozioni sui sistemi tripli coniugati, possiamo completare la costruzione colla proposizione seguente:

In ogni famiglia (Σ) *di Lamé di superficie a curvatura costante* K (*variabile in generale con* Σ), *i piani osculatori, nei punti di una superficie* Σ, *delle curve traiettorie ortogonali della famiglia, inviluppano una superficie* S *applicabile sulla quadrica* (4); *quando* Σ *descrive la famiglia* (Σ) *di Lamé, la* S *descrive una famiglia* (S), *appartenente ad uno dei nuovi sistemi tripli coniugati.*

Per la dimostrazione si consideri ad esempio il caso di una famiglia (Σ) di Lamé a curvatura costante positiva, per la quale valgono le formule del n. 4. Se con ξ, η, ζ indichiamo le coordinate di quel punto di S che corrisponde al punto (x, y, z) di Σ, troviamo

$$\xi = x + \frac{R^2}{\Phi}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}X_1 + \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}X_2 - \frac{R'}{R^2}X_3\right), \tag{5}$$

colle analoghe per η, ζ, dove si è posto

$$\Phi = \frac{\partial\theta}{\partial w}.$$

Verificheremo anche qui che le (5) definiscono un sistema triplo (u, v, w) coniugato, provando che ξ, η, ζ sono soluzioni di un conveniente sistema (α).

Pongasi, per brevità,

$$\Omega_x = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}X_1 + \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}X_2 - \frac{R'}{R^2}X_3,$$

e analogamente si definiscano Ω_y, Ω_z, sicchè le (5) si scrivono anche

$$\xi = x + \frac{R^2}{\Phi}\Omega_x.$$

Derivando rapporto ad u, v, w, si trova dapprima

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial u} &= -\frac{R^2}{\Phi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\Omega_x + \frac{\Phi}{R}\coth\theta\, X_3\right)\\
\frac{\partial\xi}{\partial v} &= -\frac{R^2}{\Phi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\Omega_x + \frac{\Phi}{R}\operatorname{tgh}\theta\, X_3\right)\\
\frac{\partial\xi}{\partial w} &= R\Phi X_3 + \frac{R^2}{\Phi}\frac{\partial\Omega_x}{\partial w} - \frac{R^2}{\Phi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\Omega_x + \frac{2RR'}{\Phi}\Omega_x,
\end{aligned}\right.$$

e, costruendo le derivate seconde miste, si vede che ξ, η, ζ sono soluzioni di un sistema (α), con

$$H_1 = \frac{1}{\Phi\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad H_2 = \frac{1}{\Phi\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}, \quad H_3 = \frac{1}{\Phi}.$$

Affatto analogamente si procederebbe nel caso di una famiglia pseudosferica (Σ) di Lamé.

Qui osserviamo ancora che l'esistenza delle trasformazioni B_k per questi sistemi tripli coniugati segue subito dall'esistenza delle trasformazioni di Bäcklund per le famiglie pseudosferiche di Lamé. E invero, se, con una trasformazione di Bäcklund, cangiamo la (Σ) in una nuova (Σ'), e con (S') indichiamo la famiglia che si ottiene da (Σ') colla stessa costruzione, si ha che: *I rispettivi sistemi tripli coniugati, cui appartengono le famiglie*

(S), (S') *di deformate delle quadriche* (4), *provengono l'uno dall'altro per una trasformazione* B_k.

7. Una terza ed ultima classe di sistemi tripli coniugati, che vogliamo considerare nella presente Nota, consterà di deformate di quei paraboloidi immaginarii tangenti all'assoluto, le quali si ottengono applicando il nuovo metodo di Weingarten alle superficie di curvatura costante [1].

Per restare nel caso più semplice, prendasi un sistema triplo ortogonale (u, v, w) in cui le $w = \text{cost}$ siano superficie pseudosferiche di raggio $=1$ (sistema Weingarten), e sia

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

il quadrato dell'elemento lineare dello spazio, riferito al sistema triplo.

Indichiamo con

$$W_1 = SxX_1 \quad , \quad W_2 = SxX_2 \quad , \quad W_3 = SxX_3$$

le distanze algebriche dell'origine dalle tre facce del triedro principale nel punto (u, v, w).

Dalle formole per le derivate dei coseni delle direzioni principali si traggono le seguenti:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial W_1}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v} W_2 + \operatorname{sen}\theta\, W_3 + \cos\theta \;,\quad \frac{\partial W_1}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u} W_2 \,, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial W_1}{\partial w} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} W_3 \\
&\frac{\partial W_2}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v} W_1 \;,\quad \frac{\partial W_2}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u} W_1 - \cos\theta\, W_3 + \operatorname{sen}\theta \\
&\qquad\qquad \frac{\partial W_2}{\partial w} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} W_3 \\
&\frac{\partial W_3}{\partial u} = -\operatorname{sen}\theta\, W_1 \;,\quad \frac{\partial W_3}{\partial v} = \cos\theta\, W_2 \\
&\qquad\qquad \frac{\partial W_3}{\partial w} = -\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} W_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} W_2 \,.
\end{aligned}\right.$$

Possiamo ora determinare *per quadrature* tre funzioni incognite

$$(6) \qquad \xi = \xi(u, v, w) \quad , \quad \eta = \eta(u, v, w) \quad , \quad \zeta = \zeta(u, v, w)$$

[1] Ved. i §§ 1-4 della mia Memoria, *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi*, Annali di matematica, ser. 3ª, tom. X (1906).

dalle formole

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial u} &= (x\cos\theta - X_3 \operatorname{sen}\theta)\, W_1 \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} &= (x \operatorname{sen}\theta + X_3\cos\theta)\, W_2 \\ \frac{\partial\xi}{\partial w} &= \left(x\frac{\partial\theta}{\partial w} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} X_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} X_2\right) W_3\,, \end{aligned}\right.$$

e dalle analoghe, per η , ζ, le condizioni d'integrabilità essendo identicamente soddisfatte. Così le ξ , η , ζ sono determinate a meno di costanti additive, ed il sistema triplo (u , v , w) dato dalle (6) è fissato a meno di una traslazione nello spazio.

Ora le due prime formole della (7) sono quelle fornite dal metodo di Weingarten, applicato alle superficie pseudosferiche, onde risulta che nel sistema triplo (6) le superficie $w =$ cost sono tutte applicabili sul paraboloide

$$(8)\qquad (x + iy)^2 + z^2 = x - iy\,.$$

Di più, sulle $w =$ cost le linee (u , v) sono quelle del sistema coniugato permanente. Per completare le verifiche e dimostrare che le (6) definiscono uno dei nostri sistemi tripli coniugati, resta solo da provare che ξ , η , ζ sono soluzioni di un sistema (α) n. 5. Ma se dalle (7) formiamo le derivate seconde miste, si vede che, in effetto, ξ , η , ζ soddisfano ad un sistema (α), in cui si ha semplicemente

$$H_1 = W_1 \quad , \quad H_2 = W_2 \quad , \quad H_3 = W_3\,.$$

Da ultimo, se trasformiamo la famiglia pseudosferica (Σ) di Lamé in un'altra (Σ'), i due sistemi tripli coniugati con una famiglia di deformate del paraboloide (8) che se ne deducono, *collocati convenientemente nello spazio*, derivano l'uno dall'altro per una trasformazione B_k.