ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Sulle equazioni alle derivate funzionali.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. Nella classificazione dei problemi che dipendono dai concetti di funzioni di linee, dopo quelli di tipo algebrico (equazioni integrali ed equazioni funzionali) vengono le equazioni integro-differenziali e le equazioni alle derivate funzionali. Fra queste ultime di speciale interesse sono quelle che appartengono al tipo delle equazioni ai differenziali totali, che vennero in modo particolare studiate; ma conviene segnalarne altre di diverso tipo che pure è utile di esaminare. È ciò che mi permetto fare in questa brevissima Nota, limitandomi a darne degli esempî.

2. Denotiamo con $F|[f(x)]_0^1|$ una quantità che dipende da tutti i valori di $f(x)$ nell'intervallo 0,1, che sia derivabile e non abbia punti eccezionali [1].

Vogliamo che essa soddisfi alla condizione

$$\int_0^1 f(\xi)\, F'|[f(x), \xi]|\, d\xi = 0, \tag{1}$$

ove $F'|[f(x), \xi]|$ denota la derivata di $F|[f(x)]|$ eseguita nel punto ξ.

Troviamo facilmente che la funzione

$$\Phi\left|\left[\frac{f(x)}{\int_0^1 f(\xi)\, d\xi}\right]\right|,$$

ove con Φ si denota una quantità che dipende in modo arbitrario da $\dfrac{f(x)}{\int_0^1 f(\xi)\, d\xi}$, ed è continua derivabile e senza punti eccezionali, soddisfa alla (1). Reciprocamente se F soddisfa la (1) essa può mettersi sotto la forma precedente, perchè non deve cambiare moltiplicando $f(x)$ per una costante qualunque.

La (1) rappresenta una delle equazioni del nuovo tipo.

3. Consideriamo

$$F|[\alpha, f(x)]_0^1|$$

ove F dipende dal parametro α e dai valori di $f(x)$ in tutto l'intervallo 0,1 e non ha punti eccezionali. Esaminiamo la equazione

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \int_0^1 F'|[\alpha, f(x), \xi]|\, d\xi \int_0^1 \varphi(\xi, \eta)\, f(\eta)\, d\eta = 0, \tag{2}$$

[1] Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes.* Paris, Gauthier-Villars, 1913, pag. 29.

nella quale $\varphi(x, \eta)$ rappresenta una funzione nota delle due variabili ξ e η e

$$F'|[\alpha, f(x), \xi]|$$

indica la derivata funzionale di F rispetto a f, eseguita nel punto ξ.

La (2) rappresenta pure una delle equazioni del nuovo tipo.

La sua risoluzione può farsi dipendere dalla risoluzione della equazione integro-differenziale [1]

$$\frac{\partial f(\xi, \alpha)}{\partial \alpha} = \int_0^1 \varphi(\xi, \eta) f(\eta, \alpha) d\eta. \tag{3}$$

Posto

$$\Lambda(\xi, \eta | \alpha) = \alpha\varphi(\xi, \eta) + \frac{\alpha^2}{2!}\varphi^{2\times\times}(\xi, \eta) + \frac{\alpha^3}{3!}\varphi^{3\times\times}(\xi, \eta) + \cdots,$$

ove gli asterischi denotano operazioni di composizione di 2ª specie, la soluzione della (3) è data da

$$f(\xi, \alpha) = \Psi(\xi) + \int_0^1 \Lambda(\xi, \eta | \alpha) \Psi(\eta) d\eta,$$

essendo $\Psi(\xi)$ una funzione arbitraria.

Ciò premesso, risolviamo l'equazione integrale

$$f(\xi) = \Psi(\xi, \alpha) + \int_0^1 \Lambda(\xi, \eta | \alpha) \Psi(\eta, \alpha) d\eta,$$

nella quale α figura come un parametro costante, e sia

$$\Psi(\xi, \alpha) = f(\xi) + \int_0^1 \lambda(\xi, \eta | \alpha) f(\eta) d\eta$$

la soluzione.

Il nucleo $\lambda(\xi, \eta | \alpha)$ si otterrà facilmente e sarà

$$\lambda(\xi, \eta | \alpha) = -\alpha\varphi(\xi, \eta) + \frac{\alpha^2}{2!}\varphi^{2\times\times}(\xi, \eta) - \frac{\alpha^3}{3!}\varphi^{3\times\times}(\xi, \eta) + \cdots$$

giacchè si verifica immediatamente che

$$\Lambda(\xi, \eta | \alpha) + \lambda(\xi, \eta | \alpha) = -\int_0^1 \Lambda(\xi, \zeta | \alpha) \lambda(\zeta, \eta | \alpha) d\zeta.$$

Denoti ora $\Phi|[\theta(x)]|_0^1$ il simbolo di una quantità che dipende arbitrariamente da tutti i valori di $\theta(x)$ per x compreso fra 0 e 1, e sia continua derivabile e senza punti eccezionali. Se $\theta(x)$ dipenderà anche da un para-

[3] Vedi Lezioni precedentemente citate cap. XIII.

metro α, Φ resulterà una funzione ordinaria del parametro stesso. In particolare si sostituisca per $\theta(x)$, $\Psi(x, \alpha)$; resulterà allora Φ una quantità che dipenderà da tutti i valori di $f(x)$ per x compreso fra 0 e 1, e sarà una funzione ordinaria del parametro α, cioè avremo [1]

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{F}\,|[\alpha, \overset{1}{\underset{0}{f(x)}}]| = \Phi\left|\left[f(x) + \int_0^1 \lambda(x, \eta|\alpha)\, f(\eta)\, d\eta\right]\right|.$$

Proviamo adesso che *la* (I) *soddisfa l'equazione* (2). La verifica è molto semplice. Deriviamo $\Phi|[\theta(x)]|$ per rapporto a $\theta(x)$ nel punto ξ: otterremo una quantità che oltre dipendere da $\theta(x)$ è una funzione di ξ. Scriviamola per semplicità $\Phi'(\xi)$. Calcoliamo ora δF. Resulterà

$$\delta\mathrm{F} = \int_0^1 \Phi'(\xi) \left\{ \delta f(\xi) + \int_0^1 \lambda(\xi, \eta|\alpha)\, \delta f(\eta)\, d\eta + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 \frac{\partial\lambda(\xi, \eta|\alpha)}{\partial\alpha} f(\eta)\, d\eta\, \delta\alpha \right\} d\xi,$$

quindi

$$\mathrm{F}'\,|[\alpha, f(x), \xi]| = \Phi'(\xi) + \int_0^1 \Phi'(\eta)\, \lambda(\eta, \xi|\alpha)\, d\eta$$

$$\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\alpha} = \int_0^1 \Phi'(\xi)\, d\xi \int_0^1 \frac{\partial\lambda(\xi, \eta|\alpha)}{\partial\alpha} f(\eta)\, d\eta.$$

Onde il primo membro della (2) si scriverà, sostituendovi le espressioni precedenti

$$\text{(4)} \qquad \int_0^1 \Phi'(\xi)\, d\xi \int_0^1 f(\eta)\, d\eta \times$$
$$\times \left[\frac{\partial\lambda(\xi, \eta|\alpha)}{\partial\alpha} + \varphi(\xi, \eta) + \int_0^1 \lambda(\xi, \zeta|\alpha)\, \varphi(\zeta, \eta)\, d\zeta \right].$$

[1] Se per esempio prendiamo

$$\Phi\,|[\overset{1}{\underset{0}{\theta(x)}}]| = \int_0^1 \lambda(x)\, \theta(x)\, dx,$$

ove $\lambda(x)$ è una certa funzione determinata, sarà

$$\mathrm{F}\,|[\overset{1}{\underset{0}{f(x)}}, \alpha]| = \int_0^1 \lambda(x)\, \Psi(x, \alpha)\, dx.$$

Se prendiamo invece

$$\Phi\,|[\overset{1}{\underset{0}{\theta(x)}}]| = \int_0^1 \int_0^1 \mu(x, y)\, \theta(x)\, \theta(y)\, dx\, dy$$

sarà

$$\mathrm{F}|[\overset{1}{\underset{0}{f(x)}}, \alpha)]| = \int_0^1 \int_0^1 \mu(x, y)\, \Psi(x, \alpha)\, \Psi(y, \alpha)\, dx dy,$$

e così di seguito.

Ma dalla espressione trovata superiormente per $\lambda(\xi, \eta|\alpha)$ si ricava

$$\frac{\partial\lambda(\xi, \eta|\alpha)}{\partial\alpha} + \varphi(\xi, \eta) + \int_0^1 \lambda(\xi, \zeta|\alpha)\, \varphi(\zeta, \eta)\, d\zeta = 0,$$

dunque la (4) sarà nulla qualunque siano $\Phi'(\xi)$ e $f(\eta)$ e per conseguenza la (2) è verificata comunque si prendano Φ ed f.

4. I procedimenti indicati, come in tutti i casi analoghi, possono facilmente farsi discendere dal noto concetto di passaggio dal finito all'infinito, che informa tutti i procedimenti dell'analisi a cui appartengono le questioni trattate. È interessante osservare come negli integrali compariscono delle *funzioni arbitrarie di linee.*

5. Di uno speciale interesse sono la equazione

$$(5) \qquad \int_0^1 \int_0^1 F''[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}), \xi, \eta]\, K(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0,$$

in cui F'' è la derivata seconda di $F|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$ eseguita nei punti ξ e η, e l'altra analoga

$$(5') \qquad \int_0^1 F''|[f(x), \xi, \xi]|\, d\xi + \int_0^1 \int_0^1 F''|[f(x), \xi, \eta]|\, H(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0,$$

ove

$$F''|[f(x), \xi, \xi]| = \lim_{\eta=\xi} F''|[f(x), \xi, \eta]|.$$

Esse possono considerarsi come equazioni tipiche corrispondenti alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine a coefficienti costanti, e possono respettivamente chiamarsi *equazioni lineari alle derivate funzionali del 2° ordine di 1ª e di 2ª specie.*

6. Supponiamo, nella (5),

$$K(\xi, \eta) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is}\, \varphi_i(\xi)\, \varphi_s(\eta), \quad a_{is} = a_{si}$$

ove le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ sono normalizzate.

Prendiamo la forma reciproca

$$G(\xi, \eta) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s b_{is}\, \varphi_i(\xi)\, \varphi_s(\eta), \quad b_{is} = b_{si}$$

tale, cioè, che

$$\sum_1^n{}_h a_{ih}\, b_{hs} = \begin{cases} 0, & i \gtrless s \\ 1, & i = s \end{cases}.$$

Poniamo

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 G(\xi,\eta)\, f(\xi)\, f(\eta)\, d\xi\, d\eta = \varrho$$

e cerchiamo le funzioni

$$\theta(\varrho) = F\,|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$$

che soddisfano la (5).

Avremo

$$F'\,|[f(x),\xi]| = \theta'(\varrho)\int_0^1 G(\xi,x)\, f(x)\, dx$$

$$F''\,|[f(x),\xi,\eta]| = \theta''(\varrho)\int_0^1 G(\xi,x)\, f(x)\, dx \int_0^1 G(\eta,y)\, f(y)\, dy + \\ + \theta'(\varrho)\, G(\xi,\eta),$$

e quindi

$$\int_0^1\int_0^1 F''\,|[f(x),\xi,\eta]|\, K(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = 2\theta''(\varrho)\,\varrho + n\theta'(\varrho).$$

Se dunque la (5) deve essere soddisfatta, sarà

(II) $$\theta(r) = A\varrho^{-\frac{n}{2}+1} + B,$$

A e B essendo due costanti arbitrarie.

7. Passiamo adesso alla (5'). Potremo sempre supporre $H(x,y)$ simmetrica. Calcoliamo $L(x,y)$ tale da soddisfare il principio di reciprocità [1], cioè

(6) $$H(x,y) + L(x,y) = -\int_0^1 H(x,\xi)\, L(\xi,y)\, d\xi,$$

ammesso diverso da zero il determinante.

Si riconosce facilmente che $L(x,y)$ sarà simmetrico, e che H ed L saranno permutabili di 2ª specie.

Poniamo

$$r = \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 L(\xi,\eta)\, f(\xi)\, f(\eta)\, d\xi\, d\eta$$

e cerchiamo le funzioni

$$\theta(r) = F\,|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$$

[1] Vedi Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, pag. 105.

che soddisfano la (5'). Avremo

$$(7) \qquad F'|[f(x), \xi]| = \theta'(r) \left\{ f(\xi) + \int_0^1 L(\xi, x) f(x)\, dx \right\}$$

$$(7') \qquad F''|[f(x), \xi, \eta]| = \theta''(r) \left\{ f(\xi) + \int_0^1 L(\xi, x) f(x)\, dx \right\} \times$$

$$\times \left\{ f(\eta) + \int_0^1 L(y, \eta) f(\eta)\, dy \right\} + \theta'(r) L(\xi, \eta).$$

Per conseguenza,

$$(8) \qquad \int_0^1 F''|[f(x), \xi, \xi]|\, d\xi + \int_0^1 \int_0^1 F''|[f(x), \xi, \eta]|\, H(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= \theta''(r) \left\{ \int_0^1 f^2(\xi)\, d\xi + \int_0^1 \int_0^1 M(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta)\, d\xi\, d\eta \right\}$$

$$+ \theta'(r) \left\{ \int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta) H(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_0^1 L(\xi, \xi)\, d\xi \right\},$$

ove

$$M = H + 2 \overset{\times\times\times\times}{H\, L} + \overset{\times\times\times\times}{H\, L^2} + \overset{\times\times}{L^2} + 2 L$$

in cui si è fatto uso, come precedentemente nel § 3, della notazione che rappresenta la composizione di 2ª specie [1].

Ma in virtù della (6), che si può scrivere

$$H + L = - \overset{\times\times\times\times}{H\, L},$$

abbiamo

$$\overset{\times\times\times\times}{H\, L^2} = - \overset{\times\times}{L^2} + H + L:$$

quindi

$$M = H - 2H - 2L - \overset{\times\times}{L^2} + H + L + \overset{\times\times}{L^2} + 2 L = L.$$

Si ha, poi,

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta) H(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = - \int_0^1 \{ L(\xi, \xi) + H(\xi, \xi) \}\, d\xi,$$

[1] Vedi Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, pag. 179.

onde la (8) si scriverà

$$\Omega = \int_0^1 F''|[f(x), \xi, \xi]|\, d\xi + \int_0^1 \int_0^1 F''|[f(x), \xi, \eta]|\, H(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$= 2\theta''(r)\, r - h\theta'(r),$$

ove

$$L = \int_0^1 H(\xi, \xi)\, d\xi .$$

Affinchè la (5′) sia soddisfatta, basterà dunque prendere

$$\text{(III)} \qquad \theta(r) = A r^{\frac{h}{2}+1} + B,$$

A e B essendo due costanti arbitrarie.

Si è così riesciti ad ottenere gli integrali (II) e (III) delle equazioni del 2° ordine lineari alle derivate funzionali di 1ª e di 2ª specie considerate analoghi a quelli sui quali si applica l'analisi di Green.

8. Dalla (7) segue

$$\delta F'|[f(x), \xi]| = \theta'(r)\, \delta f(\xi) + \int_0^1 F''|[f(x), \xi, \eta]|\, \delta f(\eta)\, d\eta$$

il punto ξ è quindi eccezionale (¹) e $\theta'(r)$ è il coefficiente differenziale di $\delta f(x)$.

Facendo uso di una notazione adottata fino dai miei primi lavori sopra questo soggetto (²) potremo scrivere

$$\Big(F'|[f(x), \xi]|\Big)'_{f(\xi)} = \theta'(r).$$

Avremo dunque

$$\Omega + \int_0^1 \Big(F'|[f(x), \xi]|\Big)'_{f(\xi)} M(\xi)\, d\xi = 2\theta''(r)\, r + (m - h)\, \theta'(r),$$

ove si è posto

$$m = \int_0^1 M(\xi)\, d\xi .$$

Preso dunque

$$\text{(IV)} \qquad F\Big|[\underset{0}{\overset{1}{f(x)}}]\Big| = \theta(r) = A r^{\frac{h-m}{2}+1} + B$$

con A e B costanti, essa verificherà l'equazione

$$\int_0^1 F''|[f(x), \xi, \xi]|\, d\xi + \int_0^1 \int_0^1 F''|[f(x), \xi, \eta]|\, H(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \int_0^1 \Big(F'|[f(x), \xi]|\Big)'_{f(\xi)} M(\xi)\, d\xi = 0 .$$

(¹) Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Chap. I, § VII.

(²) *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, Nota II, § 4, 14. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 18 sett. 1887.