ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 gennaio 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili*. Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Nel movimento a due parametri che assume una superficie S_0 quando si fa *rotolare* (¹) sopra una superficie applicabile S, un punto O, rigidamente connesso alla superficie rotolante S_0, descrive una superficie Σ; e similmente un piano π, trascinato rigidamente da S_0, inviluppa una superficie Σ (non sviluppabile). Per abbreviare, chiameremo Σ *superficie* od *inviluppo di rotolamento*; S si dirà la superficie *d'appoggio*, S_0 la *rotolante*, mentre il punto O, od il piano π, che accompagnano S_0 nel rotolamento, prenderanno il nome di punto o piano *satellite*.

Una prima e fondamentale questione che si presenta in questa teoria del rotolamento di superficie applicabili, è la seguente: La superficie, o l'inviluppo, Σ di rotolamento, possono darsi ad arbitrio? E come si trovano, data Σ, le corrispondenti coppie di superficie applicabili (S, S_0)?

Separando i due casi, enunciamo i due problemi, in certo modo duali l'uno dell'altro, in questi termini più precisi:

1°. Problema A). — *Data una qualunque superficie* Σ, *trovare tutte le coppie* (S, S_0) *di superficie applicabili, tali che, rotolando* S_0

(¹) Pel senso preciso del termine *rotolamento*, vedi Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IV$^{\text{ème}}$ Partie Chap. VI; od anche le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, pag. 34.

sopra S, *un conveniente punto* O, *satellite di* S_0, *descriva la superficie* Σ.

2°. Problema B). — *Data una superficie* Σ *non sviluppabile, trovare tutte le coppie* (S, S_0) *di superficie applicabili, tali che, rotolando* S_0 *sopra* S, *un conveniente piano* π, *satellite di* S_0, *inviluppi la superficie* Σ.

Ciascuno dei due problemi ammette sempre, come si vedrà, una infinità di soluzioni con *due funzioni arbitrarie*, e la ricerca delle infinite coppie (S, S_0) corrispondenti di superficie applicabili dipende dalla integrazione di un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, lineare nelle derivate seconde e quadratica nelle derivate prime. Le coppie (S, S_0) corrispondono *biunivocamente* alle soluzioni di questa equazione del 2° ordine.

2. Fra i punti μ della superficie Σ (o inviluppo) di rotolamento ed i punti M della superficie S d'appoggio viene stabilita, per la generazione geometrica stessa, una corrispondenza, essendo M il punto generico di contatto della S colla rotolante S_0, e μ la posizione occupata sopra Σ dal punto satellite (ovvero il punto di contatto col piano satellite). *Il punto* μ *è il piede della perpendicolare abbassata da* M *sopra* Σ.

Ora supponiamo che la superficie S, flessibile ed inestendibile, si deformi, seco trasportando, invariabilmente legati, i segmenti rettilinei $M\mu$, ed assuma la configurazione S_0 della superficie rotolante. Nel caso del problema A), i termini μ di questi segmenti dovranno raccogliersi in un unico punto O (nel punto satellite), ed invece, pel problema *B*), si distribuiranno sul piano satellite π, normale ai segmenti $M\mu$ nella loro nuova posizione. Viceversa, se esiste una configurazione S_0 della S, per la quale gli estremi μ dei segmenti $M\mu$ si raccolgono in un punto O, ovvero si distribuiscono sopra un piano π, la coppia (S, S_0) di superficie applicabili darà, nel primo caso, una soluzione del problema A) con O punto satellite, nel secondo una soluzione del problema *B*) con π piano satellite.

In seguito a ciò, diventa di fondamentale importanza, pei nostri problemi di rotolamento, il risolvere la questione seguente, che si collega al noto teorema di Beltrami sulla deformazione delle congruenze normali [1]: Una superficie S flessibile ed inestendibile si deforma, seco trasportando i segmenti rettilinei $M\mu$, uscenti dai punti M di S e terminati negli estremi μ ad una superficie Σ normale ai segmenti stessi.

Quando è che esiste una configurazione S_0 della S, per la quale la superficie Σ si contrae in un punto? ovvero una configurazione S_0 per la quale Σ diventa un piano?

Se chiamiamo R il valore (algebrico) del segmento $M\mu$, sarà R una funzione delle coordinate curvilinee u, v del punto M mobile su S. Nel

[1] Vedi le mie *Lezioni*, vol. I, pag. 311.

primo caso, R dovrà rappresentare la distanza del punto M_0 corrispondente, sulla supposta superficie applicabile S_0, dal punto fisso O; nel secondo, sarà R la distanza di M_0 dal piano fisso π.

Inversamente, supponiamo che esista una superficie S_0, applicabile sopra S, e tale che $R = M\mu$ rappresenti la distanza di M_0 (corrispondente ad M) da un punto fisso O nello spazio, ovvero la distanza da un piano fisso π. Dico, allora, che: *Quando la* S, *deformandosi, assume la configurazione* S_0, *i termini* μ *dei segmenti* $M\mu$ *si raccolgono, nel primo caso, nel punto* O, *e nel secondo si distribuiscono sul piano* π.

La dimostrazione risulta da una nota proprietà che compete agli inviluppi di una doppia infinità di sfere, comunque si deformi la superficie luogo dei centri, e cioè che: *sopra ciascuna sfera i due punti di contatto coll'inviluppo serbano una posizione invariabile* (¹).

3. Le considerazioni geometriche sopra esposte hanno trasformato i problemi A) e B) nella questione seguente:

Le normali alla superficie data Σ si intercettino con una superficie S, e si indichi con R il segmento (variabile) di normale compreso fra Σ ed S. Come deve prendersi R affinchè esista una superficie S_0 applicabile sopra S, per la quale R rappresenti la distanza di un punto variabile sopra S_0 da un punto fisso nel caso A), ovvero da un piano fisso nel caso B)?

Si riferisca, per maggior semplicità, la superficie Σ di rotolamento alle sue linee di curvatura (u, v), e siano E, G i coefficienti del quadrato del suo elemento lineare

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

ed $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ le sue curvature principali, talchè:

$$E, G; \frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$$

saranno funzioni note di u, v. Se riportiamo sopra la normale a Σ un segmento variabile

$$R = R(u, v),$$

la superficie S, luogo degli estremi di questi segmenti, avrà un elemento lineare ds_1 che si calcola subito colla formola:

$$ds_1^2 = E\left(1 + \frac{R}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(1 + \frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2 + dR^2. \tag{1}$$

a) Ora suppongasi dapprima che esista una superficie S_0 applicabile sopra S, per la quale R rappresenti la distanza del punto (u, v) di S_0 da

(¹) *Lezioni*, vol. II, pag. 88.

un punto O fisso nello spazio. Se riferiamo la S_0 ad un sistema di coordinate polari (R, θ, φ) col centro in O, delle quali R sia il raggio vettore e θ, φ gli angoli polari, per l'elemento lineare ds_0 della superficie S_0 avremo:

$$ds_0^2 = R^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi^2) + dR^2. \tag{2}$$

Per esprimere che S, S_0 sono isometriche, dobbiamo eguagliare le due forme differenziali (1), (2), onde segue

$$E\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_1}\right)^2 dv^2 = d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi^2. \tag{2*}$$

A destra abbiamo il quadrato dell'elemento lineare della sfera unitaria: e, per ciò, R dovrà essere una tale funzione di u, v da rendere la forma differenziale a sinistra di curvatura $K = +1$. Viceversa, se questo accade, avremo una soluzione del problema A), e la superficie rotolante S_0 si avrà integrando l'equazione differenziale di Riccati che occorre per ridurre la forma (2*) a sinistra al tipo normale $d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi^2$. Conchiudiamo adunque:

Per risolvere il problema A), *si riporti sopra ogni normale della superficie data* Σ *un segmento* $R = R(u, v)$, *tale da rendere la forma quadratica differenziale*

$$E\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_1}\right)^2 dv^2 \quad (^1). \tag{3}$$

di curvatura $= +1$. *Il luogo dei termini di questi segmenti dà una superficie* S *d'appoggio, e la superficie* S_0 *rotolante* (*insieme col punto satellite*) *viene individuata dalla* (2) *o* (2*), *mediante l'integrazione di un'equazione di Riccati.*

Dopo ciò, noi formiamo subito, nel modo più semplice, l'equazione a derivate parziali del 2° ordine da cui dipende il problema A), procedendo come segue. Pongasi

$$\frac{1}{R} = T$$

$$H_1 = \sqrt{E}\,.\,T + \frac{\sqrt{E}}{r_2}\,, \quad H_2 = \sqrt{G}\,.\,T + \frac{\sqrt{G}}{r_1},$$

(1) Si trasforma subito questo risultato in coordinate curvilinee qualunque. Se con

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \quad , \quad D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

si indicano le due forme quadratiche fondamentali di Σ, con H la curvatura media, con K la totale, è da determinarsi R in guisa che la forma differenziale

$$\left(\frac{1}{R^2} - K\right)(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2) - \left(\frac{2}{R} + H\right)(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2)$$

abbia la curvatura $= +1$.

e si esprima che la curvatura della (3) è $=+1$, scrivendo la relazione

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)+H_1 H_2=0.$$

Tenendo conto delle note formole

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)=\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right)=\frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$$

$$\frac{1}{r_1 r_2}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\},$$

la precedente si trasforma subito nell'altra:

$$\text{(I)}\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{H_1}\frac{\partial T}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{H_2}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\sqrt{EG}\left\{T^2+T\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\right\}=0.$$

Questa è, pel problema A), l'equazione annunciata al n. 1, lineare in $\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}$, e di 2° grado in $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$.

b) Passando al caso del problema B), dovrà qui R rappresentare la distanza del punto (u, v) della superficie S_0 dal piano fisso π e se assumiamo questo per piano xy, dovremo quindi avere

$$E\left(1+\frac{R}{r_2}\right)^2 du^2+G\left(1+\frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2+dR^2=dx^2+dy^2+dR^2.$$

In questo caso, adunque, la condizione *necessaria* e *sufficiente* è che $R=R(u,v)$ renda *nulla* la curvatura della forma differenziale quadratica

$$E\left(1+\frac{R}{r_2}\right)^2 du^2+G\left(1+\frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2\ (^1).$$

Soddisfatta questa condizione, la riduzione di questa alla forma normale dx^2+dy^2 richiede solo *quadrature*.

Volendo ora calcolare l'equazione a derivate parziali per l'attuale problema B), pongasi

$$h_1=\sqrt{E}+\frac{\sqrt{E}}{r_2}.\ R\ ,\ h_2=\sqrt{G}+\frac{\sqrt{G}}{r_1}.\ R.$$

(¹) In coordinate curvilinee qualunque (u, v), è la forma

$$(1-R^2K)(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)-(2R+R^2H)(D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2)$$

che deve avere la curvatura nulla.

e si scriva l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial v}\right)=0$$

che, calcolata, diviene:

$$\text{(II)}\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cdot\frac{1}{h_1}\frac{\partial R}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\cdot\frac{1}{h_2}\frac{\partial R}{\partial v}\right)=\frac{\sqrt{EG}}{r_1 r_2}.$$

Ogni soluzione R *di questa equazione determina una superficie* S *d'appoggio per una soluzione del problema* B); *e la superficie* S_0 *rotolante, unica e determinata, si trova con quadrature.*

Così si è in effetto dimostrato che tanto il problema A), quanto il problema B), ammettono infinite soluzioni. La loro ricerca equivale a porre l'elemento lineare della sfera, ovvero quello del piano, rispettivamente sotto le forme determinate:

$$E\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_2}\right)^2 du^2+G\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_1}\right)^2 dv^2,$$

$$E\left(1+\frac{R}{r_2}\right)^2 du^2+G\left(1+\frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2,$$

risultato questo, che presenta una stretta analogia col teorema di Weingarten relativo alle superficie W.

4. Si può facilmente trovare l'integrale generale della prima (I) nel caso che la assegnata superficie Σ di rotolamento sia un piano, ovvero una sfera.

1° caso: *Σ un piano.* Si può fare, in questo caso,

$$E=G=1\ ,\ \frac{1}{r_1}=\frac{1}{r_2}=0\,,$$

ed il problema consiste nel ridurre l'elemento lineare della sfera alla forma

$$\frac{du^2+dv^2}{R^2},$$

che è quanto dire alla forma isoterma.

Basta dunque considerare una qualunque rappresentazione conforme della sfera sul piano Σ, ed elevare in ogni punto di questo piano un segmento rettilineo normale uguale al *modulo* della dilatazione lineare nella detta rappresentazione conforme. Il luogo degli estremi di questi segmenti è una superficie S d'appoggio, e la superficie rotolante si trova, in questo caso, *in termini finiti*.

2° caso: *Σ una sfera*. Sia a il raggio di questa sfera, di cui prendiamo l'elemento lineare ds sotto forma isoterma:

$$\lambda\,(du^2 + dv^2).$$

Il problema consiste qui nel determinare R in guisa che l'elemento lineare

$$ds_1^2 = \left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{a}\right)^2 \cdot \lambda\,(du^2 + dv^2)$$

appartenga alla sfera unitaria. Si consideri adunque una qualunque rappresentazione conforme della sfera Σ sulla sfera unitaria; e sulle normali a Σ si riportino i segmenti R dati da

$$\mathrm{R} = \frac{a\mu}{a - \mu},$$

indicando con μ il modulo della dilatazione lineare. Il luogo degli estremi di questi segmenti R dà una superficie S d'appoggio, e la rotolante S_0 si ottiene ancora in termini finiti.

Del resto, la risoluzione del problema A) in questi due casi è già nota implicitamente fin dal 1900 per le ricerche del prof. Calò [1], il quale ha dato formule eleganti che forniscono insieme la superficie S d'appoggio e quella S_0 rotolante.

Un caso analogo ai precedenti si ha pel problema B) quando l'inviluppo Σ di rotolamento debba essere una sfera; ma questo non differisce in sostanza dal primo dei casi sopra considerati, se non per lo scambio fra la superficie d'appoggio e la superficie rotolante.

5. Se nei casi considerati al n. precedente (ed in nuovi, di cui trattiamo fra breve) l'integrazione della (I) e della (II) riesce completamente, in altri potremo conoscerne delle soluzioni particolari.

Così, p. es., suppongasi che la superficie di rotolamento Σ (o l'inviluppo) sia una superficie elicoidale, o, più in particolare, una superficie di rotazione. In tal caso potremo assumere, nelle nostre formole, $\mathrm{E}, \mathrm{G}, r_1, r_2$ funzioni di una combinazione lineare

$$\tau = au + bv$$

delle variabili, a coefficienti a, b costanti. Allora le equazioni (I) o (II)

[1] *Risoluzione di alcuni problemi sull'applicabilità*, in Annali di matematica, serie 3ª, tom. IV.

ammettono una doppia infinità di soluzioni particolari T o R funzioni dell'argomento stesso τ, poichè esse si cangiano, in questa ipotesi, in una equazione differenziale ordinaria del 2° ordine. E siccome R è allora costante lungo le eliche $au + bv =$ cost. (o i paralleli), si vede che la superficie S d'appoggio sarà pure elicoidale, e lo stesso si riscontra aver luogo per la superficie S_0 rotolante. Dunque: *Se la superficie* Σ *di rotolamento (o l'inviluppo) è elicoidale, esiste una doppia infinità di coppie* (S, S_0) *di elicoidi applicabili, che risolvono il problema* A), *o il problema* B).

Si consideri ancora il caso che la superficie Σ di rotolamento sia un cilindro circolare retto, di raggio $= \frac{1}{a}$. Possiamo fare

$$E = G = 1\,, \quad \frac{1}{r_1} = 0\,, \quad \frac{1}{r_2} = a\,;$$

e il problema si trasforma, pel n. 3, nell'altro di ridurre l'elemento lineare sferico alla forma (di Weingarten)

$$(T + a)^2\, du^2 + T^2\, dv^2\,.$$

Esso equivale quindi alla ricerca di tutte le deformate di una certa superficie di rotazione, che si può facilmente assegnare.

6. Nelle ricerche che abbiamo fin qui indicato, si è tacitamente escluso il caso che il rotolamento di S_0 sopra S dia luogo ad un movimento *con un solo parametro,* anzichè ad un movimento a due parametri. Questa circostanza si presenta *allora, ed allora soltanto,* che la coppia (S, S_0) consti di due rigate applicabili (R, R_0), sicchè, corrispondendosi nell'applicabilità le generatrici (pel teorema di Bonnet), la rigata rotolante R_0 tocca in ogni sua posizione la rigata R d'appoggio *lungo tutta una generatrice* e, rotolando, acquista solo una semplice infinità di posizioni. In tal caso un punto O satellite di R_0 descrive non più una superficie, *ma una curva* C, ed un piano π satellite di R_0 inviluppa una *sviluppabile*; e i problemi fondamentali A) e B) si semplificano nei due seguenti:

Problema A'). — *Data una curva qualunque* C *come curva di rotolamento («roulette»), trovare tutte le coppie* (R, R_0) *di rigate applicabili tali che, rotolando* R_0 *sopra* R, *un punto* O, *satellite di* R_0, *descriva la curva* C.

Problema B'). — *Data una qualunque sviluppabile* Σ, *trovare tutte le coppie* (R, R_0) *di rigate applicabili, tali che, rotolando* R_0 *sopra* R, *un piano* π, *satellite di* R_0, *inviluppi* Σ.

Questi due problemi sono retti ancora dalle medesime equazioni a derivate parziali (I) (II), convenientemente interpretate; ed in questi casi, come in quelli considerati al n. 4, l'integrazione riesce completamente. In ciò che segue, diamo le relative costruzioni geometriche, le quali si possono rendere intuitive mediante considerazioni infinitesimali affatto analoghe a quelle usate dal Beltrami nella sua Memoria sulla flessione delle superficie rigate [1].

7. Per risolvere il problema A'), si scelga sopra ogni piano normale alla curva C di rotolamento una retta r ad arbitrio (con legge continua). Il luogo di queste ∞^1 rette ci dà una rigata R d'appoggio, che determina, in modo unico, la rigata R_0 rotolante. Possiamo esprimere il risultato anche così: *Il problema* A') *ammette infinite soluzioni* (*con due funzioni arbitrarie*), *che si ottengono scegliendo ad arbitrio la rigata* R *d'appoggio entro il complesso delle tangenti alla sviluppabile polare della curva* C *di rotolamento.*

È poi manifesto che fra queste infinite coppie (R, R_0) di rigate applicabili vi sono ancora infinite coppie di sviluppabili. Come spigolo di regresso Γ della sviluppabile R d'appoggio si può prendere una *qualunque curva* tracciata sulla sviluppabile polare di C; lo spigolo di regresso Γ_0 della sviluppabile rotolante ne resta allora determinato (mediante le sue equazioni intrinseche). In tal caso, invece che del rotolamento delle due sviluppabili, si può parlare del rotolamento della curva Γ_0 sulla curva Γ; il che deve intendersi nel senso seguente: Le due curve Γ, Γ_0 si corrispondono per eguaglianza d'archi e di flessione nei punti corrispondenti, ed il rotolamento di di Γ_0 su Γ avviene in guisa che in ogni sua posizione Γ_0 tocca Γ nel punto corrispondente, ed ha ivi a comune con Γ il piano osculatore; il punto O, invariabilmente legato a Γ_0, descrive la curva data C.

Passando al secondo problema B'), lo risolviamo analogamente come segue: Si considerino i piani condotti per ciascuna generatrice della sviluppabile Σ assegnata normalmente alla sviluppabile stessa (piani rettificanti del suo spigolo di regresso), ed in ciascuno di questi piani si scelga ad arbitrio una retta r. Il luogo delle rette r è una rigata R d'appoggio in una soluzione del problema B'); la rigata rotolante R_0 ne resta individuata, insieme col piano satellite.

Si osservi che anche qui come soluzioni avremo infinite coppie di sviluppabili, ossia di curve rotolanti Γ, Γ_0, delle quali la curva Γ d'appoggio può scegliersi ad arbitrio fra le curve tracciate sulla sviluppabile rettificante dello spigolo di regresso di Σ.

8. Consideriamo da ultimo il caso di due rigate (R, R_0) applicabili, di cui la rotolante R_0 trascini seco rigidamente una retta r (retta satellite), la quale dunque descriverà una terza *rigata di rotolamento* R'. Proponiamoci il nuovo problema:

Problema C'). — *Data una qualunque rigata* R', *trovare tutte le coppie* (R, R_0) *di rigate applicabili, tali che, rotolando* R_0 *sopra* R, *una retta* r, *satellite di* R_0, *descriva la rigata prescritta* R'.

[1] Beltrami, *Opere*, vol. I, pag. 226.

Anche questo problema ammette infinite soluzioni, le quali però ora dipendono da una sola funzione arbitraria, e si ottengono nel modo seguente: Si consideri una generatrice g' variabile sopra R′ ed il *paraboloide delle normali* lungo g', e su questo paraboloide si segni ad arbitrio una generatrice g del sistema di g'. Il luogo di queste ∞^1 rette g, scelte con continuità, ci dà una superficie rigata R d'appoggio in una soluzione del problema C′); e la rigata R_0 rotolante, insieme con la retta satellite, ne resta individuata. Le generatrici dei paraboloidi delle normali appartenenti al sistema delle g' formano una congruenza, *entro la quale può essere scelta ad arbitrio la rigata* R *d'appoggio*.

In fine si osservi che, nel caso attuale, fra le coppie (R, R_0) di rigate applicabili che risolvono il problema C′), abbiamo una *semplice infinità* di sviluppabili, quella R d'appoggio potendosi scegliere ad arbitrio fra le sviluppabili della congruenza.

Fisica-matematica. — *Deduzione rigorosa di una relazione fondamentale nella teoria del calore raggiante*. Nota del Socio T. Levi-Civita.

Alludo alla relazione

$$\varepsilon = K\alpha, \tag{I}$$

valida in ogni punto M di un generico mezzo isotropo in equilibrio di irraggiamento: ε vi rappresenta il coefficiente di emissione in M (riferito all'unità di volume irraggiante, talchè $4\pi\varepsilon$ è la quantità di energia irraggiata tutt'intorno nell'unità di tempo); α il coefficiente di assorbimento, pure in M (per unità di lunghezza); K l'intensità specifica, e quindi πK il potere emissivo (riferito all'unità di superficie) spettante ad uno qualunque degli ∞^2 elementi superficiali uscenti da M. Si intende che ε, α, K vanno presi tutti e tre per radiazioni di una stessa frequenza; ovvero tutti e tre per l'intero spettro; più generalmente, del resto, va ritenuto che ci atteniamo al Planck [1] per definizioni e postulati [2].

Il procedimento [3], attraente per geometrica semplicità, di cui si è valso l'illustre Autore per stabilire la (I), si appoggia sopra un'ipotesi addizionale, intuitivamente plausibile, ma concettualmente complessa ed esuberante. Ecco di che si tratta. Si fissa in primo luogo un generico elemento di volume S circostante a M, e una superficie sferica Σ col centro in S,

(1) *Theorie der Wärmestrahlung*, cap. I [(2ª ediz.), Leipzig, Barth, 1913].

(2) Il Planck considera soltanto mezzi omogenei. Anche la nostra deduzione della (I) sarà svolta in questa ipotesi. Ma ciò non lede la generalità, perchè l'estensione a mezzi eterogenei (isotropi) apparisce poi ovvia. Cfr. il n. 8 del presente scritto.

(3) Op. cit., §§ 24-26.