ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Meccanica. — *Nuovi criterî di stabilità per moti stazionarî di prima specie.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota comparsa nei Rendiconti di questa R. Accademia (2° semestre 1913, pag. 642), ho dato alcuni criterî (condizioni sufficienti) di stabilità, nel caso che il sistema di equazioni differenziali, al quale intendo ricondotto il nostro studio, sia il seguente:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{2n}x_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{dx_n}{dt} = p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \cdots + p_{nn}x_n , \end{cases}$$

dove le p_{rs} $(r, s = 1, 2, \ldots, n)$ sono costanti reali. Nei riguardi delle costanti stesse, giova notare come, nei problemi d'interesse pratico, avviene, per esempio, che, assegnata ognuna di esse costanti entro un certo campo di valori, il quale dipende dalla natura delle applicazioni, si ricerca se esiste la stabilità del moto indipendentemente dai valori che competono alle costanti medesime nell'interno dei rispettivi campi di assegnazione. Tuttavia, la portata dei suddetti criterî potrebbe sembrare, a prima giunta, ristretta, mentre siamo in presenza effettivamente del contrario.

Giova, anzitutto, richiamare i criterî su menzionati.

PRIMO CRITERIO:

$$\lambda - (n-1)\,\mu \geq 0 .$$

SECONDO CRITERIO:

Basta che, almeno in corrispondenza di un certo valore dell'indice α, si abbia simultaneamente

$$\begin{cases} p_{\alpha\alpha}\,p_{si} - p_{s\alpha}\,p_{\alpha i} = 0 \\ \lambda_{\alpha\alpha} - (n-1)\,\mu_\alpha > 0 \end{cases} \qquad (s, i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, n) .$$

In cotesti criterî, le quantità $\lambda , \mu , \lambda_{\alpha\alpha} , \mu_\alpha$ s'intendono assunte così:

$$(\mathrm{I})_1 \quad \begin{cases} -\lambda \ \geq p_{ii} & (i = 1 , 2 , \dots , n) \\ \mu \ \geq |p_{ij}| & (i \neq j \, ; i , j = 1 , 2 , \dots , n) \ (^1) \\ -\lambda_{\alpha\alpha} \geq p_{\alpha\alpha} & \\ \mu_\alpha \ \geq |p_{sr}| & (s , r = 1 , 2 , \dots , \alpha - 1 , \alpha + 1 , \dots , n) . \end{cases}$$

I seguenti criterî (cioè terzo e quarto) valgono nell'ipotesi $p_{ii} \neq p_{jj}$ $(i \neq j \, ; i , j = 1 , 2 , \dots , n)$.

Terzo criterio:

$$\lambda - (n-1) \, \nu \geq 0 ,$$

dove ν è una quantità positiva, assunta in modo che si abbia simultaneamente

$$(\mathrm{I})_2 \quad \begin{cases} \nu \geq |p_{sj}| \ , \quad \nu \geq \left| \dfrac{p_{s\varepsilon} \, p_{\varepsilon j}}{p_{\varepsilon\varepsilon} - p_{ss}} \right| \ , \quad \nu \geq \left| \dfrac{p_{s\varepsilon} \, p_{\varepsilon s}}{p_{\varepsilon\varepsilon} - p_{ss}} \right| \\ (j \neq s \, ; j , s = 1 , 2 , \dots , \varepsilon - 1 , \varepsilon + 1 , \dots , n), \end{cases}$$

essendo $p_{\varepsilon\varepsilon}$ la maggiore fra le costanti p_{ii} $(i = 1 , 2 , \dots , n)$.

Quarto criterio:

$$\lambda - (n-1) \, \nu_\alpha \geq 0$$

(almeno in corrispondenza di un certo valore dell'indice α), intendendo assunta la quantità ν_α in modo che si abbia simultaneamente

$$(\mathrm{I})_3 \quad \begin{cases} \nu_\alpha \geq \left| \dfrac{p_{s\alpha} \, p_{\alpha s}}{p_{\alpha\alpha} - p_{ss}} \right| \ , \quad \nu_\alpha \geq |p_{sj}| + \left| \dfrac{p_{s\alpha} \, p_{\alpha j}}{p_{\alpha\alpha} - p_{ss}} \right| \\ (j \neq s \, ; j , s = 1 , 2 , \dots , \alpha - 1 , \alpha + 1 , \dots , n) . \end{cases}$$

Nella prima, nella seconda e nella quarta delle $(\mathrm{I})_1$ e nella $(\mathrm{I})_2$ ed $(\mathrm{I})_3$, il segno di eguaglianza è necessariamente vincolato. Così, per esempio (qualora le p_{ii} non siano tutte fra loro eguali), nelle $-\lambda \geq p_{ii}$ il segno di eguaglianza potrà sussistere, volendo, soltanto in corrispondenza della massima delle p_{ii}.

Ciò premesso, notando che, qualora le p_{ii} $(i = 1 , 2 , \dots , n)$ non siano tutte negative, i criterî primo, terzo e quarto non resultano soddisfatti: ed osservando, d'altra parte, la struttura del secondo criterio, parrebbe, a prima giunta, che tutti i suddetti criterî comportassero un campo ristretto di sfruttamento. Invece, siamo in presenza effettivamente del contrario, come mi accingo a mostrare.

(1) Il simbolo | | significa che va preso il valore assoluto della quantità racchiusa dal simbolo stesso.

Si osservi, anzitutto, l'equazione determinante

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} p_{11}-\omega\,, p_{12} & ,\dots, p_{1n} \\ p_{21}\quad , p_{22}-\omega\,, & \dots, p_{2n} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ p_{n1}\quad , p_{n2} & ,\dots, p_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0\,;$$

e si noti che, data un'equazione algebrica

$$(3)\qquad \omega^n + \alpha_1\omega^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0\,,$$

è necessario, affinchè la (3) abbia tutte le radici con parte reale non positiva, che sia $\alpha_1 \geq 0$. Sicchè, nella (2) avendosi $\alpha_1 = -\sum_{s=1}^{n} p_{ss}$, e tralasciando la considerazione del caso particolare, in cui esista qualche radice con parte reale nulla, si vede che, nei riguardi della nostra questione, rimane da intendere

$$(4)\qquad 0 > \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\,.$$

Ciò premesso, vengo a mostrare che, qualora la (4) sia soddisfatta, si può sempre, mediante opportune sostituzioni lineari a coefficienti costanti (fra le quali sarà compresa la sostituzione identica nel caso di tutte le p_{ss} negative), trasformare il sistema (1) in un altro sistema

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \dots + q_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dt} = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + \dots + q_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + \dots + q_{nn}y_n\,, \end{cases}$$

nel quale le q_{ss} $(s = 1, 2, \dots, n)$ siano tutte negative.

Si operi, dapprima, la sostituzione

$$\begin{cases} x_1 = p_1^{(1)} y_2^{(1)} + p_2^{(1)} y_2^{(1)} \\ x_2 = q_1^{(1)} y_1^{(1)} + q_2^{(1)} y_2^{(1)} \\ x_j = y_j^{(1)} \quad (j = 3, 4, \dots, n), \end{cases}$$

dove le $p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, q_1^{(1)}, q_2^{(1)}$ sono costanti. È implicitamente inteso che il determinante

$$D = \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} \\ q_1^{(1)} & q_2^{(1)} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero.

Il sistema (1) si trasformerà, allora, in un sistema nelle $y^{(1)}$, sistema che intenderò risoluto rispetto alle derivate delle $y^{(1)}$ medesime. Allora, designando con $p_{11}^{(1)}$ e $p_{22}^{(1)}$ i coefficienti rispettivi di $y_1^{(1)}$ ed $y_2^{(1)}$ nelle prime due equazioni del sistema così trasformato, resulta che, ponendo

$$p_1^{(1)} p_2^{(1)} = p^{(1)}\ ,\ p_1^{(1)} q_2^{(1)} = u^{(1)}\ ,\ p_2^{(1)} q_1^{(1)} = v^{(1)}\ ,\ q_1^{(1)} q_2^{(1)} = q^{(1)}\ , \tag{6}$$

avremo

$$\begin{cases} p_{11}^{(1)} D = p_{11} u^{(1)} - p_{21} p^{(1)} + p_{12} q^{(1)} - p_{22} v^{(1)} \\ p_{22}^{(1)} D = p_{21} p^{(1)} - p_{11} v^{(1)} + p_{22} u^{(1)} - p_{12} q^{(1)}. \end{cases} \tag{7}$$

Mediante addizione delle (7) fra loro, si ha

$$(p_{11}^{(1)} + p_{22}^{(1)}) D = (p_{11} + p_{22})(u^{(1)} - v^{(1)}).$$

Ma

$$u^{(1)} - v^{(1)} = D\ ,$$

dunque

$$p_{11}^{(1)} + p_{22}^{(1)} = p_{11} + p_{22}\ , \tag{8}$$

come resulta pure dalla teoria degli invarianti delle equazioni differenziali lineari ([1]).

La (8) rappresenta l'unica condizione, alla quale dovranno soddisfare i nuovi coefficienti $p_{11}^{(1)}$ e $p_{22}^{(1)}$: cioè, scelti $p_{11}^{(1)}$ e $p_{22}^{(1)}$ in modo che la (8) sia soddisfatta, esisterà sempre una sostituzione del tipo considerato, che porta il sistema (1) in un sistema nelle $y^{(1)}$, nel quale i coefficienti di $y_1^{(1)}$ e di $y_2^{(1)}$ saranno rispettivamente le costanti di $p_{11}^{(1)}$ e $p_{22}^{(1)}$ scelte. Infatti, la coesistenza delle (6) richiede $p^{(1)} q^{(1)} = u^{(1)} v^{(1)}$, cioè

$$p^{(1)} = w_1 v^{(1)} \quad , \quad u^{(1)} = w_1 q^{(1)}, \tag{9}$$

dove w_1 è arbitraria. Sicchè, assegnato a D un valore diverso da zero, ma, del resto, qualunque, le (7) diventano, in $u^{(1)}$ e $v^{(1)}$, le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} (p_{11} w_1 + p_{12}) u^{(1)} - (p_{21} w_1^2 + p_{22} w_1) v^{(1)} = w_1 p_{11}^{(1)} D \\ (p_{22} w_1 - p_{12}) u^{(1)} + (p_{21} w_1^2 - p_{11} w_1) v^{(1)} = w_1 p_{22}^{(1)} D\ , \end{cases} \tag{10}$$

([1]) Per la bibliografia relativa a cotesta teoria, vedasi, p. es., Pincherle e Amaldi, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*, Bologna, 1901, pag. 474.

le quali sono sempre possibili, giacchè il determinante relativo alle medesime è

$$p_{21}(p_{11}+p_{22})\,w_1^3+(p_{22}^2-p_{11}^2)\,w_1^2-p_{12}(p_{11}+p_{22})\,w_1\,,$$

il quale, soltanto nel caso $p_{12}=p_{21}=0$, $p_{11}=p_{22}$, oppure nell'altro $p_{11}=p_{22}=0$, resulta identicamente nullo, casi nei quali le (10) rappresentano un'unica equazione. Qualora le (10) non rappresentino un'unica equazione, avremo, mediante addizione delle (10) medesime fra loro,

$$u^{(1)}-v^{(1)}=\mathrm{D}\,.$$

Qualora invece le (10) rappresentino un'unica equazione, occorrerà accoppiare, con la medesima, l'altra $u^{(1)}-v^{(1)}=\mathrm{D}$.

Avute le $u^{(1)}$ e $v^{(1)}$, le (9) porgeranno (intendendovi w_1 diversa da zero) le $p^{(1)}$ e $q^{(1)}$. Avremo, poi, nei riguardi delle $p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, q_1^{(1)}, q_2^{(1)}$, le equazioni (6), che potremo, p. es., trattare così: Si assumano $p_1^{(1)}$ e $p_2^{(1)}$ in modo che si abbia $p_1^{(1)}p_2^{(1)}=p^{(1)}$. Allora, nei riguardi delle $q_1^{(1)}$ e $q_2^{(1)}$, avremo le equazioni

$$p_1^{(1)}q_2^{(1)}=u^{(1)}\quad,\quad p_2^{(1)}q_1^{(1)}=v^{(1)}\,. \tag{11}$$

Si osservi, infine, che, avendosi $u^{(1)}v^{(1)}=p^{(1)}q^{(1)}$, resulterà evidentemente $p_1^{(1)}q_2^{(1)}\cdot p_2^{(1)}q_1^{(1)}=p^{(1)}q^{(1)}$, cioè $p^{(1)}q_1^{(1)}q_2^{(1)}=p^{(1)}q^{(1)}$. Da cui, qualora $p^{(1)}$ non sia nulla, segue $q_1^{(1)}q_2^{(1)}=q^{(1)}$. Invece, nel caso speciale della $p^{(1)}$ nulla, avremo (essendo w_1 diversa da zero) nulla la $v^{(1)}$, e quindi $u^{(1)}=\mathrm{D}$, sicchè $p_1^{(1)}$ sarà anche allora diversa da zero, mentre $p_2^{(1)}$ sarà nulla, avendosi $p_1^{(1)}p_2^{(1)}=p^{(1)}$. Per cui, in cotesto caso speciale, la seconda delle (11) diventa un'identità, mentre la $q_1^{(1)}q_2^{(1)}=q^{(1)}$, anzichè una conseguenza di precedenti resultati, sarà l'equazione da accoppiarsi con la $p_1^{(1)}q_2^{(1)}=u^{(1)}$.

Ora, operando sulle $y^{(1)}$ la sostituzione

$$\left\{\begin{array}{l} y_1^{(1)}=y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)}=p_1^{(2)}y_2^{(2)}+p_2^{(2)}y_3^{(2)} \\ y_3^{(1)}=q_1^{(2)}y_2^{(2)}+q_2^{(2)}y_3^{(2)} \\ y_j^{(1)}=y_j^{(2)}\quad(j=4\,,5\,,\ldots,n), \end{array}\right.$$

ed indicando con $p_{22}^{(2)}$ e $p_{33}^{(2)}$ i coefficienti rispettivi di $y_2^{(2)}$ ed $y_3^{(2)}$ nel sistema trasformato, avremo

$$p_{22}^{(2)}+p_{33}^{(2)}=p_{22}^{(1)}+p_{33}^{(1)}\,,$$

ovvero

$$p_{22}^{(2)}+p_{33}^{(2)}=p_{22}^{(1)}+p_{33}\,,$$

giacchè $p_{33}^{(1)}=p_{33}$. Analogamente proseguendo, avremo

$$p_{33}^{(3)}+p_{44}^{(3)}=p_{33}^{(2)}+p_{44}\;;\ \text{ecc.}$$

Sicchè, denotando, col sistema (5), l'ultimo sistema, al quale conducono quelle successive trasformazioni, resulterà

$$q_{11} = p_{11}^{(1)}, \; q_{22} = p_{22}^{(2)}, \dots, q_{nn} = p_{nn}^{(n-1)}.$$

Ora, osservando che

$$q_{11} + q_{22} + \cdots + q_{nn} = p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn}$$

rappresenta, in virtù delle precedenti considerazioni, l'unica condizione, alla quale devono soddisfare le q_{ii} $(i = 1, 2, \dots, n)$, resulta chiaramente che, qualora sussista la (4), si può sempre ottenere che nel sistema (5) tutte le q_{ii} $(i = 1, 2, \dots, n)$ siano negative.

Infine, qualora, in corrispondenza del sistema (5), resulti soddisfatto qualcuno dei criterî da me dati, le soluzioni del sistema stesso saranno certamente stabili e, quindi, tali saranno anche quelle del sistema (1), giacchè la stabilità non si perde attraverso sostituzioni lineari a coefficienti costanti.

Matematica. — *Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation.* Nota di R. Gateaux, presentata dal Socio V. Volterra.

I. — Préliminaires.

Désignons par Ω l'ensemble des fonctions réelles $z(\alpha)$ de la variable réelle α définies et continues pour $0 \leq \alpha \leq 1$ et telles que $o \leq z(\alpha) \geq 1$.

Soit $\mathrm{U}|[z]|$ une fonctionnelle définie, réelle et bornée dans Ω. Nous nous proposons de déterminer une *fonctionnelle d'ordre n d'approximation de* $\mathrm{U}|[z]|$, c'est-à-dire une fonctionnelle $\mathrm{V}|[z]|$ d'ordre n, telle que, si $\mathrm{V}'|[z]|$ est une autre fonctionnelle d'ordre n, on ait:

$$\text{maximum}\,|\mathrm{U}|[z]| - \mathrm{V}|[z]|| \leq \text{maximum}\,|\mathrm{U}|[z]| - \mathrm{V}'|[z]||.$$

On voit immédiatement qu'on peut se borner aux fonctionnelles d'ordre n réelles et c'est ce que nous ferons par la suite.

Lemme. — *Tout ensemble de fonctionnelles d'ordre n bornées dans leur ensemble dans Ω est compact: c'est-à-dire que de toute infinité d'entre elles on peut extraire une suite tendant (uniformément ou non) vers une limite.*

D'après un théorème de M. Fréchet (*Sur quelques points du calcul fontionnel*, n° 19, Circolo matematico di Palermo, 1906), il suffit pour cela que les fonctionnelles de l'ensemble soient bornées et également continues en toute fonction z.