ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Sicchè, denotando, col sistema (5), l'ultimo sistema, al quale conducono quelle successive trasformazioni, resulterà

$$q_{11} = p_{11}^{(1)}, \; q_{22} = p_{22}^{(2)}, \ldots, q_{nn} = p_{nn}^{(n-1)}.$$

Ora, osservando che

$$q_{11} + q_{22} + \cdots + q_{nn} = p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn}$$

rappresenta, in virtù delle precedenti considerazioni, l'unica condizione, alla quale devono soddisfare le q_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$, resulta chiaramente che, qualora sussista la (4), si può sempre ottenere che nel sistema (5) tutte le q_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ siano negative.

Infine, qualora, in corrispondenza del sistema (5), resulti soddisfatto qualcuno dei criterî da me dati, le soluzioni del sistema stesso saranno certamente stabili e, quindi, tali saranno anche quelle del sistema (1), giacchè la stabilità non si perde attraverso sostituzioni lineari a coefficienti costanti.

Matematica. — *Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation.* Nota di R. GATEAUX, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Désignons par Ω l'ensemble des fonctions réelles $z(\alpha)$ de la variable réelle α définies et continues pour $0 \leq \alpha \leq 1$ et telles que $o \leq z(\alpha) \geq 1$.

Soit $U|[z]|$ une fonctionnelle définie, réelle et bornée dans Ω. Nous nous proposons de déterminer une *fonctionnelle d'ordre n d'approximation de* $U|[z]|$, c'est-à-dire une fonctionnelle $V|[z]|$ d'ordre n, telle que, si $V'|[z]|$ est une autre fonctionnelle d'ordre n, on ait:

$$\text{maximum}\,|U|[z]| - V|[z]|| \leq \text{maximum}\,|U|[z]| - V'|[z]||\,.$$

On voit immédiatement qu'on peut se borner aux fonctionnelles d'ordre n réelles et c'est ce que nous ferons par la suite.

LEMME. — *Tout ensemble de fonctionnelles d'ordre n bornées dans leur ensemble dans Ω est compact: c'est-à-dire que de toute infinité d'entre elles on peut extraire une suite tendant (uniformément ou non) vers une limite.*

D'après un théorème de M. Fréchet (*Sur quelques points du calcul fontionnel*, n° 19, Circolo matematico di Palermo, 1906), il suffit pour cela que les fonctionnelles de l'ensemble soient bornées et également continues en toute fonction z.

La première condition est satisfaite par hypothèse. Quant à la seconde, on démontre sans difficulté que les fonctionnelles de l'ensemble sont également continues dans tout le champ Ω.

II. — Existence et propriétés des fonctionnelles d'ordre n d'approximation.

Théorème. *Toute fonctionnelle* $U|[z]|$ *définie, réelle et bornée dans* Ω *admet une fonctionnelle d'ordre n d'approximation.*

Utilisant le lemme précédent, on établit ce théorème par la méthode qu'a exposée M. Borel pour les fonctions d'une variable (*Fonctions de variables réelles*, page 82).

Théorème. *Il existe des fonctionnelles* $U|[z]|$ *admettant plusieurs fonctionnelles d'ordre* **n** *d'approximation, même si ces fonctionnelles* $U|[z]|$ *sont assujetties à être uniformément continues.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème correspondant démontré par M. Tonelli (Annali di Matematica pura ed applicata, 1908), pour les fonctions continues de deux variables qui sont des fonctionnelles uniformément continues particulières. L'exemple suivant est plus simple que celui qu'a formé M. Tonelli.

Rappelons d'abord une remarque de cet auteur. Soit la fonctions $F(x,y)$ définie et continue pour $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Soit $\overline{y}$ une valeur particulière de y, $\Pi_n(x)$ le polynome de degré n d'approximation de $F(x,\overline{y})$, μ le maximum de $|F(x,\overline{y}) - \Pi_n(x)|$.

Soit $\Pi_n(x,y)$ un polynome de degré n d'aproximation de $F(x,y)$ et μ' le maximum de $|F(x,y) - \Pi_n(x,y)|$.

On a nécessairement $\mu' \geq \mu$. Il en résulte que si, par un moyen quelconque, on trouve un polynome $P(x,y)$ de degré n tel que $|F(x,y) - P(x,y)| \leq \mu$, $P(x,\gamma)$ est nécessairement un polynome de degré n d'approximation.

Venons maintenant à notre exemple. Nous allons définir, dans le domaine $a \leq x \leq b$, $o \leq y \leq 1$, une fonction continue $F(x,y)$ admettant plusieurs polynomes de degré n d'approximation.

Soient $f(x)$ une fonction continue pour $a \leq x \leq b$ et qui ne soit pas un polynome de degré n; $\Pi_n(x)$ son polynome de degré n d'approximation; μ le maximum de $|f(x) - \Pi_n(x)|$. Posons:

$$F(x,y) = f(x) + y[\Pi_n(x) - f(x)].$$

Considérons les polynomes de degré n:

$$\Pi_n(x,y) = \Pi_n(x) + \lambda y.$$

Il suffit de former la différence $F(x,y) - \Pi_n(x,y)$ pour constater que son module reste inférieur ou égal à μ tant que $|\lambda| \leq \mu$. Tous les polynomes $\Pi_n(x,y)$ pour lesquels $|\lambda| \leq \mu$ sont donc d'approximation.

Continuité de la correspondance. — Si la correspondance entre une fonctionnelle bornée et ses fonctionnelles d'ordre n d'approximation n'est pas univoque, elle est en un certain sens continue:

THÉORÈME. *Soient* $U_1|[z]|, \ldots, U_p|[z]|, \ldots$ *une suite de fonctionnelles bornées dans* Ω *et tendant uniformément vers la fonctionnelle* $U|[z]|$. *Soient* $W_1^{(n)}|[z]|, \ldots, W_p^{(n)}|[z]|, \ldots$ *des fonctionnelles d'ordre* n *d'approximation de* $U_1, \ldots, U_p, \ldots$. *Cette suite* $W_p^{(n)}$ *admet au moins un élément limite et chacun de ses éléments limites est une fonctionnelle d'ordre* n *d'approximation de* $U|[z]|$. *De plus les approximations obtenues pour* $U_1, \ldots, U_p, \ldots$ *tendent vers une limite égale à l'approximation obtenue pour* U.

Les fonctionnelles bornées U_p tendant uniformément vers une limite sont bornées dans leur ensemble et U est également bornée. Par suite les $W_p^{(n)}$ sont aussi bornées dans leur ensemble; elles forment un ensemble compact d'après le lemme du début, c'est-à-dire qu'elles admettent au moins un élément limite.

Soit $W^{(n)}|[z]|$ un de ces éléments limites. Ce ne peut être qu'une fonctionnelle d'ordre n. Je dis qu'elle est d'approximation pour U.

De la suite $W_p^{(n)}$ j'extrais une suite tendant vers $W^{(n)}$; ou encore je puis supposer que c'est la suite $W_p^{(n)}$ qui tend vers $W^{(n)}$. Soient μ_p le maximum de $|U_p|[z]| - W_p^{(n)}|[z]||$ et μ la plus petite limite des nombres μ_p.

Je démontre qu'il ne peut exister une fonctionnelle d'ordre n donnant de $U|[z]|$ une approximation inférieure à μ. Car une telle fonctionnelle donnerait pour certaines grandes valeurs de p une meilleure approximation de U_p que $W_p^{(n)}$.

Je démontre ensuite que $W^{(n)}$ donne pour U une approximation égale à μ. C'est donc une fonctionnelle d'approximation.

Enfin je démontre que la suite μ_p, ou toute autre suite analogue, a une seule valeur limite égale à μ. Car si une telle suite admettait une valeur limite $\mu' > \mu$, on pourrait en extraire une autre suite admettant μ' comme plus petit élément limite; alors le raisonnement de l'avant-dernier paragraphe montrerait qu'on ne peut pas obtenir pour U une approximation égale à $\mu < \mu'$. Ou bien une telle suite admettrait une valeur limite $\mu'' < \mu$; alors le raisonnement du dernier paragraphe montrerait qu'on peut obtenir pour U une approximation égale à $\mu'' < \mu$. Ces deux conclusions sont également absurdes.

III. — APPLICATION À LA REPRÉSENTATION DE CERTAINES FONCTIONNELLES.

Soit $U|[z]|$ une fonctionnelle qui soit dans Ω limite d'une suite de fonctionnelles d'ordres entiers, la convergence étant uniforme dans tout le champ Ω.

Soient $W^{(1)}|[z]|, \ldots, W^{(p)}|[z]|, \ldots$ une suite de fonctionnelles d'ordres $1, \ldots, p, \ldots$ d'approximation de $U|[z]|$.

Le raisonnement employé dans le cas des fonctions d'une variable montre que cette suite converge uniformément vers U. De plus toute autre suite de fonctionnelles d'ordres $1, \ldots, p, \ldots$ fournissent pour U des approximations inférieures ou égales à celles que fournissent les fonctionnelles correspondantes de la suite $W^{(p)}$.

Matematica. — *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* Nota di Lucien Godeaux, presentata dal Corrispondente Francesco Severi.

Les involutions doublement infinies, appartenant à une surface algébrique, possèdent un nombre infini ou un nombre fini de points unis. Les involutions jouissant de cette dernière propriété ont été l'objet, ces derniers temps, de plusieurs travaux.

MM. Enriques et Severi d'une part (¹), MM. Bagnera et De Franchis d'autre part (²), ont étudié les involutions appartenant à une surface de Jacobi ou de Picard; ensuite, M. Enriques a étudié les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un (³); enfin, j'ai considéré les involutions de genres zéro et de bigenre un existant sur une surface également de genres zéro et de bigenre un (⁴). Toutes ces involutions possèdent une propriété commune: elles sont engendrées par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. J'ai observé récemment que cette propriété pouvait s'étendre aux involutions appartenant à une surface algébrique quelconque, pourvu qu'elles ne possèdent qu'un nombre fini de points unis. C'est ce résultat que je me propose d'exposer ici. D'une manière plus précise, j'établirai que:

Si une involution, appartenant à une surface algébrique, ne possède qu'un nombre fini (éventuellement nul) de points unis, cette involution est

(¹) *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques.* Acta Mathematica (1909), vol. XXXII, pag. 283; vol. XXXIII, pag. 321 (Prix Bordin, 1907).

(²) *Le superficie algebriche le quali ammettono*... Memorie della Società dei XL (1908), ser. 3ª, vol. XV, pag. 251.

(³) *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno.* Rend. R. Accad. di Bologna, 1909-1910, pag. 71. Le théorème établi par M. Enriques dans cette Note m'a permis de classer toutes les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un. L'ordre de ces involutions ne peut être que 2, 3, 4, 6, 8 ou 12. Un Mémoire sur ce sujet paraîtra prochainement dans les Annales de l'École Normale Supérieure.

(⁴) *Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$* [Bull. de la Soc. Math. de France (1913), tom. XLI, pag. 178]; *Détermination des correspondances rationnelles existant entre deux surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$* [Bulletin de l'Acad. Romaine (1913), tom. II, pag. 65].