ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

2) Deux systèmes Σ différents de Σ_1, par exemple Σ_2 et Σ_3, coïncident.

Dans le premier cas, les courbes de Σ_1 passeraient par le point x_2, ce qui est impossible par construction.

Dans le deuxième cas, les courbes C_2 de Σ_2 passeraient par x_3, et celles C_3 de Σ_3 par x_2. Cela ne peut arriver pour un point x_1 générique, car alors, lorsque x_1 décrirait une courbe C_1, les courbes C_2, C_3 correspondantes coïncideraient, et, contrairement à ce qui a été démontré plus haut, les courbes transformées des C_1 au moyen de I_n ne se décomposeraient pas en $n-1$ courbes.

Nous avons donc n systèmes doublement infinis *distincts*: $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$.

Considérons un groupe générique de I_n, et soit y_1 un point quelconque de ce groupe. Indiquons par H_1 le faisceau des courbes C_1 passant par y_1.

Les courbes de Σ_2, homologues des courbes C_1 de H_1, passent par un certain point du groupe de I_n considéré. Nous indiquerons par y_2 ce point et par H_2 le système ∞^1 formé par les courbes C_2 homologues des courbes C_1 de H_1. De la même manière, nous désignerons par $y_3, y_4, \dots, y_n$; $H_3, H_4, \dots, H_n$ les autres points et les autres systèmes ∞^1 homologues respectivement de y_1 dans le groupe de I_n considéré, et de H_1 dans les systèmes $\Sigma_3, \Sigma_4, \dots, \Sigma_n$.

Faisons décrire au point y_1, sur la variété réelle V à quatre dimensions qui représente la surface F dans le sens de Riemann, un cycle quelconque. Les systèmes $H_1, H_2, \dots, H_n$ varieront respectivement dans les systèmes *distincts* $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$, et, par suite, ne coïncideront jamais. Donc, après un chemin quelconque décrit par y_1 sur V, les systèmes $H_1, H_2, \dots, H_n$ ne subissent aucun changement. Par suite, les points $y_2, y_3, \dots, y_n$ dépendent rationnellement de y_1. Notre théorème est ainsi complétement démontré.

Matematica — *Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Nel ristretto spazio che ho potuto concedere alla mia Nota recante lo stesso titolo della presente, inserita nel vol. XXII, pp. 275-282 (2° semestre 1913) di questi Rendiconti, non hanno trovato posto le applicazioni ad esempii concreti dei due teoremi di unicità enunciati alla fine della Nota stessa. In questi ultimi tempi mi si è dimostrata l'opportunità di far conoscere quelle applicazioni, in seguito a che, come mi fece osservare il professore Fubini, sarà soltanto resa palese tutta la portata di quei teoremi, presentemente abbastanza riposta. In questa breve Nota mi permetto appunto di mostrare le applicazioni sopraddette. Si vedrà che, in forza dei citati teo-

remi, sarà possibile dare esempii, oltre i notissimi, di equazioni ellittiche lineari alle derivate parziali del second'ordine, per le quali vale il teorema di unicità relativo agli integrali che prendono valori assegnati sopra il contorno di un campo connesso che può illimitatamente estendersi come ad esso consente, per esempio, la sola condizione di essere tutto contenuto in un angolo ([1]).

Mi limito a considerare le equazioni ellittiche, per le quali, com'è noto, ogni teorema di unicità nei problemi dei valori al contorno è anche, sotto speciali ipotesi ulteriori per il relativo campo, un teorema d'esistenza; ma le considerazioni che farò, offrono anche altrettanti teoremi di unicità relativi agli integrali di un'equazione parabolica lineare alle derivate parziali del second'ordine, che prendono valori assegnati sopra il contorno di un campo connesso.

2. Sia data l'equazione ellittica

$$\text{(I)} \qquad L(z) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial z}{\partial x} + c\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \\ + 2h\frac{\partial z}{\partial x} + 2k\frac{\partial z}{\partial y} + Az = f,$$

per la quale supponiamo definiti i coefficienti in un certo campo Γ del piano x, y, *tutto al finito*, avente nel suo interno il punto origine delle coordinate, e le funzioni

$$a, b, c, \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, \frac{\partial c}{\partial y}, h, k, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial y}, A, f,$$

finite e continue in tutto Γ, mentre ivi è sempre

$$a > 0, \quad c > 0, \quad ac - b^2 > 0.$$

Enunciamo il teorema di unicità, stabilito nella mia Nota citata, relativo agli integrali dell'equazione (I) assoggettati a prendere valori assegnati sopra il contorno c di un campo connesso C di Γ.

Teorema di unicità. — *Sia $\varphi(x, y)$ una funzione arbitaria definita in tutto Γ, ivi finita e continua colle sue derivate φ_x e φ_y, mentre la φ_y vi si mantiene sempre diversa da zero; poniamo*

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \chi,$$

e indichiamo con θ una funzione sempre positiva in Γ, per la quale ivi risulti

$$\text{(1)} \qquad a \geq \theta, \quad c \geq \theta\chi^2, \quad (a - \theta)(c - \theta\chi^2) - (b + \theta\chi)^2 \geq 0.$$

([1]) I teoremi finora conseguiti in proposito, sono relativi a campi intieramente contenuti entro una striscia, entro un quadrato, entro una corona circolare ecc.; cfr. il n. 3 della mia Nota citata.

Posto, inoltre,

$$t = -\theta\chi\,,$$

indichiamo con m il minimo della funzione

$$\alpha(x\,,y) = e^{\int_0^x \frac{\theta_x(s\,,y) + t_y(s\,,y)}{\theta(s\,,y)}\,ds}\,,$$

e con M *un numero positivo non inferiore al massimo dell'altra funzione*

$$\beta(x\,,y) = \frac{1}{\theta}\left(\mathrm{A} - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial y}\right) e^{\int_0^x \frac{\theta_x(s\,,y) + t_y(s\,,y)}{\theta(s\,,y)}\,ds}$$

Si ha allora che: dato un campo connesso C *di* $\boldsymbol{\Gamma}$, *se il primo e l'ultimo punto d'incontro di ogni curva* $\varphi = cost.$ *che invade* C, *col contorno* c *di* C, *limitano su questa un arco la cui proiezione ortogonale sopra l'asse* x *non supera la quantità*

$$\delta = \pi\sqrt{\frac{m}{\mathrm{M}}}\,,$$

è unico in C *l'integrale dell'equazione ellittica* $\mathrm{L}(z) = f$ *che su* c *prende valori prescritti.*

Per maggiore chiarezza, facciamo vedere come sia possibile, lasciando alla χ completa arbitrarietà tra le funzioni finite e continue in $\boldsymbol{\Gamma}$, costruire una funzione positiva θ ivi verificante le diseguaglianze (1). Basterà per ciò prendere per θ una funzione sempre positiva nel campo $\boldsymbol{\Gamma}$ e ivi sempre minore di entrambi i minimi delle due funzioni

$$a\;,\;\psi = \frac{ac - b^2}{a\chi^2 + 2b\chi + c}\,,$$

certamente non nulli nel campo $\boldsymbol{\Gamma}$ che abbiamo supposto finito.

Nell'ipotesi, che converrà in seguito considerare, in cui $\boldsymbol{\Gamma}$ si estende all'infinito, la funzione θ esisterà qualora si ammetta pei coefficienti $a\,,b\,,c$, quello speciale comportamento all'infinito, secondo il quale le due funzioni a e ψ si mantengono discoste da *zero* più di un termine assegnato σ. In quest'ipotesi, per $\boldsymbol{\Gamma}$, non si potrà neppure assegnare arbitrariamente la funzione $\varphi(x\,,y)$ e i rimanenti coefficienti $h\,,k\,,\mathrm{A}$; si dovrà soddisfare alla condizione che la funzione $\alpha(x\,,y)$ si mantenga pur essa discosta dallo *zero* più di un termine assegnato m, e che la funzione $\beta(x\,,y)$ non superi un numero fisso M.

Dall'enunciato teorema di unicità segue che, nel caso che sia, in $\boldsymbol{\Gamma}$,

$$\mathrm{A} - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial y} \equiv \mathrm{H}(x\,,y) \leq 0\,,$$

il campo C non deve soddisfare ad alcuna condizione affinchè per esso valga il teorema; si potrà invero prendere allora per M una variabile positiva infinitesima. Ciò è notissimo; pertanto, nel sèguito, sottintenderemo che *la funzione* $\mathrm{H}(x, y)$ *prenda sempre, in* Γ, *anche valori positivi.*

3. Ciò premesso, per una maggiore comprensione del teorema di unicità del numero precedente, consideriamo le sue conseguenze in qualche caso particolare. Cominciamo dal più interessante; e prendiamo per funzione φ la seguente:

$$y + \frac{x^2}{2k};$$

solchiamo cioè il campo Γ con la famiglia Φ di parabole eguali

$$y + \frac{x^2}{2k} = h,$$

di parametro k aventi l'asse delle y per comune asse. Si avrà $\chi = \frac{x}{k}$. Prendiamo per θ una *costante* positiva, minore di entrambi i minimi nel campo Γ (*supposto finito*) delle funzioni

$$a\,,\ \psi = \frac{k^2(ac - b^2)}{ay^2 + 2kbx + ck^2};$$

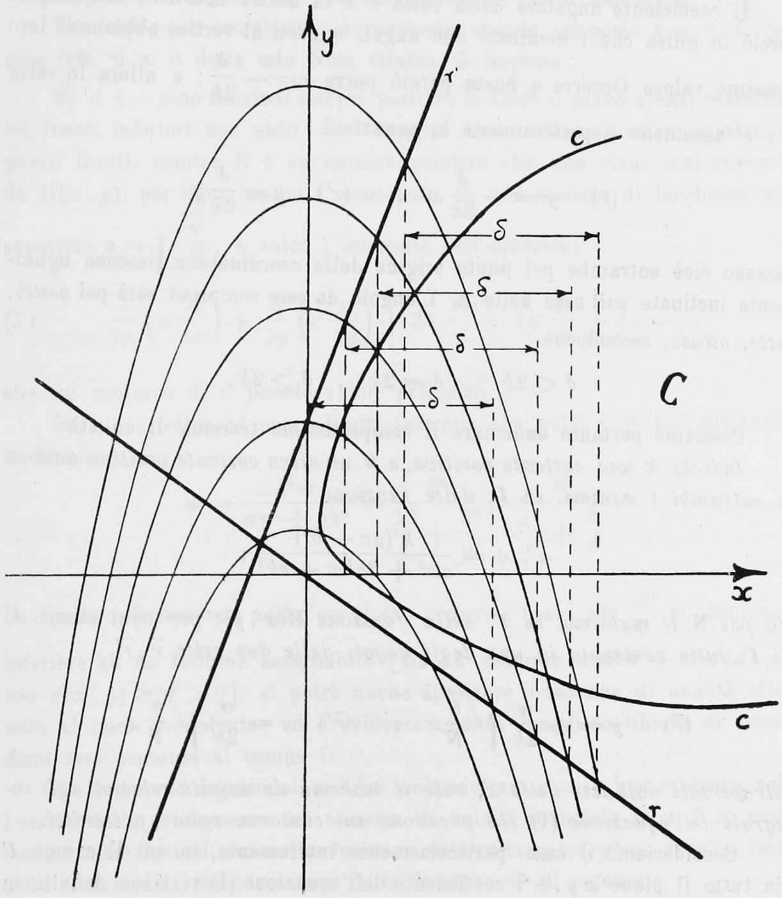
risulterà $\alpha(x, y) = 1$, $\beta(x, y) = \frac{\mathrm{H}}{\theta}$. Designamo con N il massimo, in Γ, della funzione $\mathrm{H}(x, y)$; in forza del nostro teorema di unicità potremo affermare che:

Dato un campo C di Γ, se il primo e l'ultimo punto di incontro di ogni parabola Φ che invade C, nel contorno c di C, limitano su questa un arco la cui proiezione ortogonale sull'asse x non supera la quantità $\delta = \pi \sqrt{\frac{\theta}{\mathrm{N}}}$, è unico in C l'integrale dell'equazione (I) che su c prende valori prescritti.

È molto semplice la costruzione di campi C presentanti la particolarità indicata nel teorema precedente. A tal uopo (ved. figura) conduciamo la retta r per l'origine di equazione $y = \gamma x$, e consideriamo tutte le parabole Φ che la incontrano. Sopra ognuna di queste parabole fissiamo per senso positivo di percorso quello, secondo cui deve procedere un osservatore, che cammini sul piano x, y, percorrendo la parabola in guisa che il relativo fuoco giaccia sempre alla sua sinistra.

Se, dopo ciò, a partire da un punto d'incontro P_h di ogni parabola $\varphi = h$ della retta r, stacchiamo sulla parabola, nel verso positivo, un segmento di essa, $\mathrm{P}_h\mathrm{P}'_h$, la cui proiezione ortogonale sull'asse x è misurata dalla costante δ, subito si vede che il luogo dei punti P'_h è una seconda retta r'. Ed invero, detta ξ l'ascissa di P'_h, sarà $\xi + \delta$ quella di P_h; e si avrà perciò:

$$\eta(\xi + \delta) = h - \frac{(\xi + \delta)^2}{2k}.$$



Ne segue, per l'ordinata η di P'_h, il valore

$$\eta = h - \frac{\xi^2}{2k} = h - \frac{(\xi + \delta)^2}{2k} + \frac{(\xi + \delta)^2}{2k} - \frac{\xi^2}{2k} = \eta(\xi + \delta) + \frac{\delta}{2k}(2\xi + \delta);$$

il luogo dei punti P'_h è pertanto la retta r' di equazione

$$y = \left(\gamma + \frac{\delta}{k}\right) x + \gamma\delta + \frac{\delta^2}{2k}.$$

Ne segue che: *il campo C soddisferà alle volute condizioni per la validità del teorema di unicità, semplicemente se* (ved. figura) *è tutto contenuto in uno dei due angoli delle rette* r, r' *solcati dai segmenti di parabola* $P_h P_h'$.

Il coefficiente angolare della retta r è in nostro arbitrio; scegliamolo perciò in guisa che i nominati due angoli opposti al vertice abbiano il loro massimo valore. Occorre e basta perciò porre $\gamma = -\frac{\delta}{2k}$; e allora le rette r e r' assumono rispettivamente le equazioni

$$(r) \quad y = -\frac{\delta}{2k} x \quad , \quad (r') \quad y = \frac{\delta}{2k} x:$$

passano cioè entrambe pel punto origine delle coordinate, e riescono ugualmente inclinate sull'asse delle x. L'angolo da esse compreso sarà poi *acuto*, *retto*, *ottuso*, secondochè

$$\delta < 2k \quad , \quad \delta = 2k \quad , \quad \delta > 2k .$$

Possiamo pertanto enunciare il semplicissimo teorema di unicità:

Indichi k *una costante positiva, e* θ *un'altra costante positiva minore di entrambi i minimi, in* Γ, *delle funzioni*

$$a \; , \; \psi = \frac{k^2(ac - b^2)}{ax^2 + 2bkx + ck^2} ;$$

sia poi N *il massimo, in* Γ, *della funzione* $\mathrm{H}(x, y)$: *per ogni campo* C *di* Γ, *tutto contenuto in uno degli angoli delle due rette* $\bar{r}$, $\bar{r}'$,

$$(\bar{r}) \quad y = -\frac{\pi}{2k}\sqrt{\frac{\theta}{\mathrm{N}}}\, x \quad , \quad (\bar{r}') \quad y = \frac{\pi}{2k}\sqrt{\frac{\theta}{\mathrm{N}}}\, x ,$$

attraversati dall'asse delle x, *vale il teorema di unicità relativo agli integrali dell'equazione* (I) *che prendono sul contorno valori prescritti.*

Consideriamo il caso, particolarmente interessante, in cui il campo Γ sia tutto il piano xy, e i coefficienti dell'equazione (I) vi siano definiti in modo che esista sempre una costante positiva θ minore di entrambi i limiti inferiori, in tutto il piano, delle funzioni a e ψ, ed esista un numero positivo N che si mantenga maggiore dei valori di $\mathrm{H}(x, y)$; varrà sempre allora il teorema di unicità per campi C soggetti, ad esempio, alla sola condizione d'essere contenuti in uno degli angoli delle rette $\bar{r}$, $\bar{r}'$, attraversati dall'asse delle x. Osserviamo che, fissato k e quindi θ, l'apertura dell'angolo $(\bar{r}, \bar{r}')$, in cui deve essere contenuto il campo C, dipende dai valori di N, ed essa aumenta e tende ad essere di 180° col diminuire del limite superiore N di $\mathrm{H}(x, y)$. Comunque, purchè N sia finito, riusciamo a costruire campi C, per cui vale il teorema di unicità, *suscettibili di estendersi illimitamente nelle infinite direzioni contenute in un angolo.*

4. Confrontiamo le condizioni ora imposte al campo C con quelle che, anche nelle speciali ipotesi ultimamente fatte pei coefficienti dell'equazione (I), vengono ad esso imposte nei teoremi di unicità finora conseguiti.

Facciamo, per semplicità, il confronto avendo supposto $b \equiv 0$. È ben noto (cfr. il n. 3 della mia Nota citata), il teorema:

Se a e c sono funzioni sempre positive in tutto il piano aventi entrambe ivi limiti inferiori non nulli, e θ' designa una costante positiva minore di questi limiti, mentre N è un numero positivo che non viene mai superato da $H(x, y)$, per ogni campo C contenuto in una striscia di larghezza non superiore a $\pi \sqrt{\frac{\theta'}{N}}$, è unico l'integrale dell'equazione

$$\text{(I')} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(a \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(c \frac{\partial z}{\partial y}\right) + 2h \frac{\partial z}{\partial x} + 2k \frac{\partial z}{\partial y} + Az = f,$$

che sul contorno di C prende valori prescritti.

Se a e c, oltre ad avere limiti inferiori non nulli, sono tali che anche la funzione

$$\psi = \frac{k^2 ac}{ax^2 + ck^2} = \frac{k^2}{\frac{x^2}{c} + \frac{k^2}{a}} > \frac{k^2}{\frac{x^2}{c} + \frac{k^2}{\theta'}},$$

ha limite inferiore non nullo, per il che occorre e basta che $\frac{x^2}{c}$ si mantenga inferiore ad un termine assegnabile [sia ad esempio $c \equiv \theta' + x^2 c'(x, y)$, con $c'(x, y) \geq \sigma > 0$], si potrà anche applicare il teorema di unicità ottenuto al num. precedente; ed è evidente quanta maggiore libertà di estendersi esso consenta al campo C.

5. Il metodo seguìto al n. 3, si può adottare, com'è ben evidente, nell'esame delle conseguenze del teorema di unicità enunciato al n. 2 in moltissime altre ipotesi che sulla funzione arbitraria $\varphi(x, y)$ si possono fare. Offre interesse la considerazione della famiglia Φ di catenarie

$$y + k \cosh \frac{x}{k} = h;$$

si avrà $\chi = \operatorname{senh} \frac{x}{k}$, e se, nell'ipotesi che il campo Γ sia tutto il piano, supponiamo inoltre non nulli i limiti inferiori delle funzioni

$$a\,,\ \psi = \frac{ac - b^2}{a \operatorname{senh}^2 \frac{x}{k} + 2b \operatorname{senh} \frac{x}{k} + c},$$

e finito il limite superiore di H, si giunge per il campo C a condizioni ancora meno restrittive della sua libertà di estendersi illimitatamente in varie direzioni. Nelle ipotesi del n. 3, il coefficiente c dalla (I) deve avere all'infinito un tal comportamento da risultare il rapporto $\frac{x^2}{c}$ limitato superiormente, qui il coefficiente c deve invece crescere all'infinito dell'ordine (almeno) di un esponenziale, per modo che il rapporto $\operatorname{senh}^2 \frac{x}{k} : c$ risulti limitato superiormente.

Considerando la famiglia Φ di cerchi concentrici

$$x^2 + y^2 = h^2 ,$$

bisognerà limitarsi a quella parte di Γ che è tutta al disopra della retta $y = \varepsilon$ (ε costante positiva), o tutta al disotto della retta $y = -\varepsilon$. Si ha $\chi = \frac{x}{y}$, per cui, se il campo Γ è tutto il piano e vogliamo applicare il nostro teorema di unicità a campi C situati ovunque nel semipiano $y \geq \varepsilon$, dobbiamo supporre che le funzioni

$$a \ , \ \psi = \frac{y^2(ac - b^2)}{ax^2 + 2bxy + cy^2} ,$$

abbiamo, per $y \geq \varepsilon$, limiti inferiori non nulli (ne seguirà il rapporto $x^2 : cy^2$ limitato superiormente). Sarà possibile allora la determinazione della costante positiva θ, e si avrà

$$\alpha = e^{\frac{x^2}{2y^2}} \ , \ \beta = \frac{\mathrm{H}}{\theta} e^{\frac{x^2}{2y^2}} ,$$

se dunque, inoltre, i rimanenti coefficienti h, k, A dell'equazione sono tali che il prodotto $\mathrm{H}e^{\frac{x^2}{2y^2}}$ non superi un numero positivo N, per un campo C del semipiano $y \geq \varepsilon$, il cui contorno stacchi su ogni cerchio Φ (che lo incontra) un arco di proiezione ortogonale sull'asse x non superiore alla quantità $\delta = \pi \sqrt{\frac{\theta}{\mathrm{N}}}$, vale il teorema di unicità. Ne segue in particolare che: *Per ogni campo* C *tutto contenuto nella porzione dell'angolo retto* $y \geq \varepsilon$, $x \geq -\frac{\delta^2 + \varepsilon^2}{2\delta}$, *limitata dalla retta* $y = \varepsilon$ *e dalla parabola*

$$y^2 = 2\delta x + \delta^2 + \varepsilon^2 ,$$

vale il teorema di unicità.