ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 aprile 1914.

P. Blaserna, Presidente.

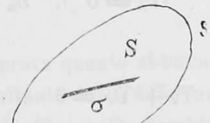
MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla teoria delle distorsioni elastiche.* Nota I del Socio Carlo Somigliana.

I.

Oggetto di questa Nota è di stabilire nel modo più generale il problema delle deformazioni di un corpo elastico, quando in esso avvengono delle interposizioni o soppressioni di sottili strati di materia lungo una data superficie, e l'equilibrio si ristabilisce senza intervento alcuno di forze esterne.



Deformazioni di questa specie sono state studiate largamente, e con brillante successo, dal prof. Volterra che le chiamò *distorsioni*. Manterremo anche noi questa denominazione, notando però subito che, in ciò che segue, essa assumerà un significato più ampio di quello che essa ha nei lavori del Volterra. Ecco come porremo il problema delle distorsioni.

Sia S lo spazio occupato dal corpo elastico, s la superficie che lo limita. Sia poi σ una superficie che supporremo dapprima, per semplicità, tutta interna al corpo; lungo di essa immaginiamo venga eseguito un taglio. Le due faccie del taglio siano poi spostate arbitrariamente l'una rispetto all'altra, in modo da lasciare un piccolo spazio vuoto, che allora supporremo riempito da nuovo materiale; oppure in modo da penetrare nelle parti contigue del corpo, nel qual caso supporremo soppresse queste parti che verrebbero in certo modo ad essere doppiamente riempite del materiale del corpo. In entrambi i casi supporremo saldati i lembi del taglio fra loro o col materiale aggiunto.

L'intuizione ci dice che uno stato speciale di tensione, e di equilibrio, si deve determinare nel corpo.

Vediamo di studiare la quistione analiticamente e col sussidio dell'ordinaria teoria dell'elasticità.

Le condizioni che devono essere soddisfatte lungo il taglio σ sono quelle che ci dicono che i punti corrispondenti sulle due faccie del taglio devono subire spostamenti differenti in modo o da lasciare il vano nel quale avviene la infiltrazione di materia, o da determinare il sottile strato che deve essere soppresso. In un punto qualunque di σ, indicando con u_σ, v_σ, w_σ delle funzioni arbitrarie dell'ordine di grandezza degli spostamenti elastici u, v, w; con ν, ν' le normali alle due faccie di σ; con u_ν, v_ν, w_ν le componenti degli spostamenti elastici pei punti della faccia di normale ν, e analogamente con $u_{\nu'}$, $v_{\nu'}$, $w_{\nu'}$ i valori corrispondenti per l'altra faccia, dovremo avere

$$(1_a) \qquad u_\nu - u_{\nu'} = u_\sigma \quad , \quad v_\nu - v_{\nu'} = v_\sigma \quad , \quad w_\nu - w_{\nu'} = w_\sigma \, .$$

Inoltre non devono intervenire forze esterne, nè di massa, nè superficiali. Indicando perciò con la solita notazione i coefficienti di tensione, se n è la normale interna ad s, dovremo avere sopra questa superficie

$$(2) \qquad X_n = 0 \quad , \quad Y_n = 0 \quad , \quad Z_n = 0$$

e sulla superficie σ

$$(1_b) \qquad X_\nu + X_{\nu'} = 0 \quad , \quad Y_\nu + Y_{\nu'} = 0 \quad , \quad Z_\nu + Z_{\nu'} = 0 \, .$$

Difatti perchè sussista l'equilibrio delle tensioni lungo σ è necessario che i due vettori che rappresentano le tensioni elastiche sull'una e sull'altra faccia di σ si facciano equilibrio.

A rigore queste condizioni dovrebbero essere soddisfatte sulle due faccie *spostate* di σ; ma, come sempre si fa nella teoria dell'elasticità, supposti piccolissimi gli spostamenti, ammetteremo che le condizioni stesse siano soddisfatte sulla σ.

Ora è facile vedere che le condizioni poste sono sufficienti ad individuare, anche dal punto di vista analitico, la deformazione del corpo.

Sia E la funzione che rappresenta l'energia elastica e che è, come sappiamo, una funzione quadratica positiva dei sei coefficienti di deformazione

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad y_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad z_z = \frac{\partial w}{\partial z} ,$$

$$y_z = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad z_x = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad x_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} ,$$

per cui si ha

$$2\mathrm{E} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x_x} x_x + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y_y} y_y + \ldots + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x_y} x_y$$

ed inoltre, come è noto,

$$\mathrm{X}_x = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x_x} \quad , \quad \mathrm{Y}_y = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y_y} \ldots \quad \mathrm{X}_y = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x_y} .$$

In queste condizioni, ammesse soddisfatte le equazioni indefinite dell'equilibrio

$$\frac{\partial \mathrm{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{X}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{X}_z}{\partial z} = 0 , \ldots$$

si trova subito

$$\int_{\mathrm{S}} 2\mathrm{E}d\mathrm{S} = -\int_\sigma (\mathrm{X}_\nu u_\nu + \mathrm{Y}_\nu v_\nu + \mathrm{Z}_\nu w_\nu)\, d\sigma - \int_\sigma (\mathrm{X}_{\nu'} u_{\nu'} + \mathrm{Y}_{\nu'} v_{\nu'} + \mathrm{Z}_{\nu'} w_{\nu'})\, d\sigma$$

$$-\int_s (\mathrm{X}_n u + \mathrm{Y}_n v + \mathrm{Z}_n w)\, ds ,$$

e quindi se si ammette che siano soddisfatte le $(1_{a,b})$ e le (2) si ha

$$\text{(A)} \qquad \int_{\mathrm{S}} 2\mathrm{E}d\mathrm{S} = -\int_\sigma (\mathrm{X}_\nu u_\sigma + \mathrm{Y}_\nu v_\sigma + \mathrm{Z}_\nu w_\sigma)\, d\sigma .$$

Questa relazione ci prova quanto abbiamo asserito. Da essa infatti risulta che la deformazione risultante dalla differenza di due deformazioni, che soddisfacessero entrambe alle $(1_{a,b})$ (2), sarebbe tale da annullare l'espressione della energia elastica. Essa rappresenterebbe cioè uno spostamento rigido del corpo. La deformazione che soddisfa alle equazioni indefinite dell'equilibrio ed alle condizioni superficiali $(1_{a,b})$ (2) è quindi univocamente determinata all'infuori di uno spostamento rigido, dal quale si può sempre fare astrazione nelle quistioni d'equilibrio elastico.

Queste considerazioni stanno qualunque sia la struttura del corpo dal punto di vista elastico, sia esso cioè isotropo od anisotropo.

Noi possiamo quindi stabilire di chiamare distorsione qualunque deformazione prodotta in un corpo elastico qualsiasi da uno strato di *discontinuità, nel senso precedentemente indicato quando non intervengano forze esterne a ristabilire l'equilibrio.*

Queste considerazioni si estendono immediatamente al caso in cui σ incontra la superficie s.

II.

Le relazioni $(1_{a,b})$ devono valere lungo tutta la superficie σ e comprendono tutte le condizioni meccaniche relative alla distorsione da aggiungersi alle equazioni indefinite dell'equilibrio. Le (1_a) potranno quindi essere derivate lungo direzioni tangenti alla σ e potremo da esse dedurre nuove condizioni parimenti necessarie.

Data l'invarianza delle relazioni precedenti rispetto alla posizione degli assi coordinati, per studiare il significato delle $(1_{a,b})$ in un punto generico di σ, potremo fissare che gli assi siano presi in modo che la direzione positiva dell'asse z coincida con la direzione della normale ν in quel punto. Due direzioni ortogonali arbitrariamente scelte nel piano tangente a σ, che supporremo sempre determinato, daranno le direzioni degli assi delle x e delle y.

Potremo quindi derivare le (1_a) rispetto ad x e ad y. E per brevità indicheremo con $D[f]$ il salto che una funzione f subisce nel passaggio attraverso σ nella direzione di ν. Cioè se f_ν ed $f_{\nu'}$ sono rispettivamente i valori di f sulle due faccie di σ, porremo

$$D[f] = f_\nu - f_{\nu'} .$$

Dalle (1_a) allora derivando rispetto ad y troviamo

$$\text{(3)} \qquad D[x_x] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} \quad , \quad D[y_y] = \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} \quad , \quad D[x_y] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x} .$$

Queste equazioni ci determinano le discontinuità attraverso la superficie σ di tre dei sei coefficienti di deformazione; è facile vedere che le (1_b) ci determinano le discontinuità dei rimanenti tre. Esse infatti possono essere scritte, tenendo conto dell'attuale orientazione degli assi

$$D[X_z] = 0 \quad , \quad D[Y_z] = 0 \quad , \quad D[Z_z] = 0$$

e siccome X_z, Y_z, Z_z sono funzioni lineari indipendenti dei sei coefficienti di deformazione, le equazioni precedenti, tenendo conto delle (3) potranno porsi sotto la forma

$$D[a_{3i}\, z_z + a_{4i}\, y_z + a_{5i}\, z_x] = -\left[a_{1i} \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + a_{2i} \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} + a_{6i} \left(\frac{\partial w_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x} \right) \right]$$
$$i = 3 , 4 , 5$$

ove le a_{ih} sono delle costanti, che rappresentano i coefficienti dell'espressione dell'energia. E siccome le stesse equazioni possono scriversi anche sotto la forma

$$(4)\qquad a_{3i}\,\mathrm{D}[z_z] + a_{4i}\,\mathrm{D}[y_z] + a_{5i}\,\mathrm{D}[z_x] = $$
$$= -\left[a_{1i}\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + a_{2i}\frac{\partial v_\sigma}{\partial y} + a_{6i}\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x}\right)\right]$$

risolvendo rispetto a $\mathrm{D}[z_z]$, $\mathrm{D}[y_z]$, $\mathrm{D}[z_x]$ avremo le discontinuità richieste.

Nel caso dell' isotropia queste equazioni sono

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}_z] = \mu\,\mathrm{D}[x_z] = 0 \quad , \quad \mathrm{D}[\mathrm{Y}_z] = \mu\,\mathrm{D}[y_z] = 0\,,$$
$$\mathrm{D}[\mathrm{Z}_z] = \mathrm{D}[\lambda(x_x + y_y) + (\lambda + 2\mu)\,z_z] = 0\,,$$

ove $\lambda\,,\mu$ sono le solite costanti dell' isotropia.

Abbiamo di qui

$$\mathrm{D}[x_z] = 0 \quad , \quad \mathrm{D}[y_z] = 0$$
$$\mathrm{D}[z_z] = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right).$$

Possiamo dunque concludere *che le condizioni poste rispetto alla superficie* σ, *cioè le* $(1_{a,b})$, *determinano in modo completo le discontinuità che attraversando questa superficie debbono subire tutti i sei coefficienti di deformazione*

$$x_x \quad y_y \quad z_z \quad y_z \quad z_x \quad x_y\,.$$

Da ciò segue che fissando, come ha fatto Weigarten [1], per definire le distorsioni, che i sei coefficienti di deformazione debbono essere continui attraverso il taglio, *si vengono a porre delle condizioni nuove ad un problema già per se stesso fisicamente e analiticamente determinato*, cioè si viene a trattare un problema speciale, della cui opportunità può discutersi sotto altri punti di vista.

Giova però osservare che se la continuità di tutti i coefficienti di deformazione, e quindi di quelli di tensione, porta a considerare nell' intorno di un punto qualunque appartenente al taglio una distribuzione di tensioni analoga a quella che si ha nei punti ordinarî del corpo, in modo cioè, come si esprime il Volterra, che non resti traccia del taglio, e della interposizione o sottrazione di materia, anche nel caso più generale nostro non si ha, nell' intorno dei punti del taglio, una distribuzione di tensioni che contraddica alle ordinarie leggi dell'equilibrio. Difatti queste sono completamente rispettate per gli elementi superficiali tangenti a σ. E per quelli che attraversano

(1) *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi.* Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem., 1901.

questa superficie avviene invece che possono considerarsi come separati in due elementi, l'uno situato da una parte e l'altro dall'altra di σ, ciascuno dei quali per se stesso è soggetto a due tensioni uguali e contrarie (a cagione della continuità lungo σ) come ordinariamente avviene per tutti gli elementi superficiali interni ad un corpo elastico. Queste due porzioni dell'elemento sono quindi in equilibrio, ciascuna separatamente, sebbene soggette a tensioni generalmente diverse.

Da ciò che precede possiamo dedurre le condizioni perchè tutti i sei coefficienti di deformazione (e quindi di tensione) siano continui attraverso il taglio, cioè si verifichi la distribuzione supposta da Weingarten. Queste condizioni, in base alle (3) (4), sono evidentemente le seguenti

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x} = 0 \, .$$

Il Weingarten ha dato una interpretazione geometrica di tali condizioni che egli ha trovato sotto altra forma.

Notiamo intanto che in queste relazioni gli assi x, y si devono intendere appartenenti ad una terna di assi variabili da punto a punto sopra σ, in modo che l'asse delle z sia sempre coincidente colla normale alla superficie.

Il significato delle (5) è allora che nel passaggio dalla superficie σ a quella infinitamente vicina che si ottiene facendo subire ad ogni punto uno spostamento di componenti u_σ, v_σ non vi sono nè allungamenti lineari, nè variazioni nell'angolo di due direzioni ortogonali; ossia l'elemento superficiale si mantiene rigido. Il che porta, secondo anche Weingarten, alla condizione che le due superficie debbano essere applicabili.

Qui però conviene aggiungere un'osservazione di notevole importanza.

Noi possiamo infatti soddisfare alle (5), oltre che nel modo anzidetto, anche supponendo che le u_σ, v_σ siano nulle in tutti i punti della superficie e attribuendo alla w_σ valori arbitrarî. La discontinuità si conserva quindi per la sola componente normale.

Esiste quindi una distorsione che soddisfa alle condizioni di Weingarten (cioè alla condizione che siano continui tutti i coefficienti di deformazione attraverso σ) e che si ottiene spostando normalmente al taglio tutte le coppie di punti corrispondenti sulle due faccie di esso.

Questa distorsione è completamente sfuggita al Weingarten. Io ho già avuto occasione di segnalarla in un caso speciale, quello in cui σ è piana [1].

Naturalmente questa distorsione può sussistere insieme a quella precedentemente considerata; e così dalla sovrapposizione delle due si ha il tipo

[1] *Sulle deformazioni elastiche non regolari.* Atti del IV Congresso dei Matematici, Roma, 1908.

più generale delle distorsioni, che nella citata Comunicazione al Congresso di Roma ho proposto di chiamare *di Weingarten.*

Questo risultato risolve così in modo completo la quistione relativa alle condizioni perchè una distorsione sia di Weingarten. Il risultato a cui ero giunto nel caso di un taglio piano si estende in modo semplicissimo e diretto al caso di un taglio secondo una superficie qualunque [1].

III.

È nota la corrispondenza che esiste fra i problemi della Statica elastica ed alcuni problemi della teoria del potenziale, corrispondenza che è stata la base delle geniali ricerche del Betti nella Teoria dell'elasticità.

Nella teoria delle distorsioni questa corrispondenza è stata interpretata dal Volterra come una analogia fra idrodinamica ed elastostatica. Vediamo quale sia il significato dei precedenti risultati sotto questo punto di vista.

Proponiamoci il problema di trovare una funzione V armonica in uno spazio S, la quale debba avere sulla superficie s la derivata normale interna nulla, e sia sempre regolare essa e le sue derivate prime e seconde in tutto S, eccetto che sopra una superficie σ, interna ad S, attraverso la quale essa debba avere assegnate discontinuità, mentre la derivata normale si conserva continua.

Debbasi cioè avere

$$(6_a)\qquad \Delta_2 V = 0 \quad \text{in tutto S}$$

$$(6_b)\qquad \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{sopra } s$$

$$(6_c)\qquad V_\nu - V_{\nu'} = g\,, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial V}{\partial \nu'} = 0 \quad \text{sopra } \sigma$$

ove g è una funzione arbitrariamente data, che supporremo però regolare, in tutti i punti di σ.

È facile vedere che la V, dalle condizioni precedenti, è univocamente determinata all'infuori di una costante additiva.

Si ha infatti dalle (6_a)

$$\int_S \Delta_1 V dS = -\int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds - \int_\sigma V_\nu \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma - \int_\sigma V_{\nu'} \frac{\partial V}{\partial \nu'} d\sigma$$

[1] Devo qui notare che pressochè nella stessa epoca in cui compariva la Nota del Weingarten, il prof. Gebbia, in una Memoria degli Annali di Matematica: *Le deformazioni tipiche dei corpi solidi elastici* (Ser. III, tom. VII, 1902). considerava le deformazioni elastiche per interposizione o soppressione di materia, con concetti che in parte collimano con quelli dai quali noi siamo partiti.

e quindi per le $(6_{b,c})$

$$\int \Delta_1 V dS = -\int_\sigma (V_\nu - V_{\nu'}) \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma = -\int_\sigma g \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma .$$

Questa relazione è l'analoga della (A) e ci dice subito che due funzioni le quali soddisfacciano alle $(6_{a,b,c})$ non possono differire che per una costante. Il problema proposto è nella teoria del potenziale l'analogo del problema delle distorsioni, come noi l'abbiamo posto, nella statica elastica.

Osserviamo ora che mentre la seconda delle (6_c) determina il modo di comportarsi della derivata normale di V attraverso σ, la prima assegna invece determinate discontinuità per le derivate tangenziali. Assumendo infatti gli assi x, y nel piano tangente in un punto di σ, troviamo

$$\frac{\partial V_\nu}{\partial x} - \frac{\partial V_{\nu'}}{\partial x} = \frac{\partial g_\sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_\nu}{\partial y} - \frac{\partial V_{\nu'}}{\partial y} = \frac{\partial g_\sigma}{\partial y}.$$

E analogamente derivando un'altra volta rispetto ad x e ad y ricaviamo

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V_\nu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial x\, \partial y}.$$

Risultano così determinate dalla prima equazione (6_c) le discontinuità di tre delle derivate seconde. Dalla seconda delle (6_c), che può scriversi

$$\frac{\partial V_\nu}{\partial z} = \frac{\partial V_{\nu'}}{\partial z},$$

derivando rispetto ad x, e y abbiamo le discontinuità (che in questo caso sono nulle) di altre due

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial x\, \partial z}, \quad \frac{\partial^2 V_\nu}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial y\, \partial z},$$

e finalmente la discontinuità della sesta derivata risulta determinata dalla equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial y^2}.$$

Possiamo dunque concludere che le due relazioni (6_c) determinano le discontinuità di tutte le derivate prime e seconde della funzione V.

Che la funzione V possa effettivamente esistere risulta subito dall'osservare che per le condizioni $(6_{b,c})$ si ha

$$\int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds + \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma + \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial \nu'} d\sigma = 0 .$$

Come possa determinarsi risulta dalle considerazioni seguenti. Poniamo

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma ,$$

ove r indica la distanza da un punto generico di σ, e, indicando con U una nuova funzione da determinarsi invece di V, poniamo

$$V = U + W .$$

Cerchiamo a quali condizioni deve soddisfare la U. Per le proprietà ben note dei potenziali di doppio strato, avendosi sopra σ

$$W_\nu - W_{\nu'} = g$$

dovremo avere

$$(7_a) \qquad U_\nu - U_{\nu'} = 0 .$$

La U sarà quindi continua attraverso σ, e dovranno essere parimenti continue tutte le sue derivate prime e seconde. Difatti dalla seconda delle (6_c) e per le proprietà delle derivate normali della W, dovrà essere

$$(7_b) \qquad \frac{\partial U_\nu}{\partial \nu} + \frac{\partial U_\nu}{\partial \nu'} = 0 .$$

E da questa relazione insieme alla (7_a), col procedimento precedentemente indicato, risulta appunto la continuità di tutte le derivate prime e seconde. In altri termini siccome la funzione W e le sue derivate prime e seconde hanno su σ le stesse discontinuità che deve avere la V, la funzione U e le sue derivate prime e seconde dovranno essere continue.

Quindi U dovrà essere in S armonica, finita e continua insieme a tutte le sue derivate prime e seconde; inoltre sulla superficie s dovrà soddisfare alla condizione

$$\frac{\partial U}{\partial n} = - \frac{\partial W}{\partial n} ,$$

mentre d'altra parte si ha

$$\int_s \frac{\partial U}{\partial n} ds = - \int_s \frac{\partial W}{\partial n} ds - \int_\sigma \left(\frac{\partial W}{\partial \nu} + \frac{\partial W}{\partial \nu'} \right) d\sigma = \int_S \Delta_2 W dS = 0 .$$

Il problema è quindi ridotto alla determinazione di una funzione armonica e regolare in uno spazio S della quale sono assegnati i valori della derivata normale sulla superficie s, che ne forma il contorno. Per quanto è noto una tale funzione esiste sempre.

Conviene però osservare che pei punti della linea che forma il contorno di σ possono presentarsi in certi casi degli infiniti per le derivate della funzione W e quindi anche di V. Però tali infiniti vengono a scomparire se si suppone che sul contorno di σ si annulli la funzione g, insieme ad alcune sue derivate tangenziali.

Una osservazione di questo genere, per quanto riguarda il problema elastico, si trova nella citata mia Comunicazione al Congresso dei Matematici.

Il problema d'idrodinamica che corrisponde al problema analitico ora considerato è il seguente:

In uno spazio S, *a pareti rigide esiste una fessura* σ; *da ogni elemento superficiale di questa esce da una parte, e si assorbe dall'altra, una uguale quantità di un fluido incomprensibile nell'unità di tempo. Determinare il moto stazionario, non rotatorio del fluido, che ne consegue.*

È chiaro che un moto stazionario di questa specie può avvenire anche se lo spazio S è semplicemente connesso linearmente. Il che invece, come è ben noto, non potrebbe accadere se non vi fosse immissione od assorbimento di fluido.

A rigore nel problema enunciato il potenziale di velocità V non è determinato direttamente dalla funzione g, ma dal flusso $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ attraverso gli elementi di σ. Ma non è qui il caso di ricercare le relazioni che passano fra g e $\frac{\partial V}{\partial \nu}$.

Da quanto abbiamo detto segue poi che il caso di g costante deve essere escluso, poichè allora comparirebbero effettivamente dei valori infiniti per le derivate prime di W sulla linea del contorno di σ. Il problema idrodinamico diviene, in questo caso, quello del moto determinato nel fluido da una linea vorticosa coincidente colla linea del contorno della superficie σ. (Cfr. Lamb., *Hydrodynamics*, art. 148).

Il procedimento precedente che riconduce la determinazione della funzione V al cosidetto secondo problema di Dirichlet, suggerisce un procedimento per risolvere per via analoga, il problema delle distorsioni di un corpo elastico. Un tale concetto fu già sostanzialmente applicato dal Volterra nei casi da lui trattati.

Per estenderlo al caso nostro dobbiamo trovare la deformazione che corrisponde nella statica elastica al potenziale W di doppio strato. Di tal quistione ci occuperemo in una Nota successiva.