ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

Chimica. — *Sopra gli azossifenoli.* Nota del Socio ANGELO ANGELI.

Meccanica. — *Sopra le azioni a cui è soggetto un corpo entro una massa liquida in movimento.* Nota del Corrispondente E. ALMANSI.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Su l'inversione di alcuni integrali e la integrazione delle equazioni a derivate parziali col metodo delle caratteristiche.* Nota del Corrispondente O. TEDONE.

In questa Nota ci proponiamo dapprima di eseguire l'inversione di certi integrali o, come al presente si preferisce di dire, di risolvere certe equazioni integrali di Volterra di prima specie. Gli sforzi fatti in quest'ordine di studî hanno avuto per scopo di preparare il materiale occorrente all'integrazione di una speciale categoria di equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti col metodo delle caratteristiche di Riemann-Volterra. Però ci è parso che queste ricerche sull'inversione di integrali abbiano anche un valore loro proprio. Ed è perciò che la loro esposizione non è stata ristretta a quella parte di esse che è strettamente necessaria al conseguimento del principale scopo prefissoci. D'altra parte dobbiamo pure osservare che, mentre i risultati che esponiamo nella presente Nota sul problema dell'inversione di integrali sono suscettibili di ulteriori estensioni, in varii sensi, essi non contengono tutto quello che è indispensabile per risolvere, in tutti i casi, il problema di integrazione propostoci e di cui tratteremo nell'ultima parte di questa stessa Nota. Al fine di completare questi studii, abbiamo in animo di ritornare sull'argomento in una prossima occasione.

I.

Si tratti, in primo luogo, di determinare la funzione $\varphi(x)$ dall'equazione

$$\int_0^x \varphi(\xi)\, I_n(x-\xi)\, d\xi = \Phi(x)\,, \tag{1}$$

dove n è un numero intero e

$$(2) \qquad I_n(t) = \sum_1^{\infty} i \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2i}}{i!\,(n+i)!},$$

supposto, s'intende, che l'equazione (1) sia possibile, ciò che richiede che $\Phi(x)$ si annulli, per $x=0$, di ordine $n+1$.

Per risolvere questa quistione, partiamo dalla formola

$$(3) \qquad I_1(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_0(x_1-\xi)\, I_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0}\, d\xi\,,$$

che abbiamo dimostrata in una Nota precedente [1], e teniamo presenti le notissime relazioni fra le funzioni I di diversi indici che andiamo a scrivere:

$$(4) \qquad I_0'(t) = I_1(t)\ ,\ I_1'(t) - \frac{1}{t} I_1(t) = I_2(t)\ ,\ 2I_n'(t) = I_{n+1}(t) + I_{n-1}(t)\,,$$

dove l'accento è simbolo di derivata. Derivando la (3) rispetto ad x_1 e tenendo conto delle due prime relazioni (4), si trova subito

$$(5) \qquad I_2(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_1(x_1-\xi)\, I_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0}\, d\xi\,.$$

Vogliamo ora dimostrare che sussiste la formola generale

$$(6) \qquad I_n(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_{n-1}(x_1-\xi)\, I_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0}\, d\xi$$

che si può porre anche sotto la forma

$$(6') \qquad I_n(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_1(x_1-\xi)\, I_{n-1}(\xi - x_0)}{x_1 - \xi}\, d\xi\,.$$

Poichè la (6) è giusta per $n=1$ e per $n=2$, per dimostrarla in generale, basta far vedere che, se essa è vera per un determinato valore di n, è vera anche per il valore successivo. E, per questo, basta derivare la (6), rispetto ad x_1, e tener conto dell'ultima delle (4).

Alla (6) si può dare anche l'aspetto seguente

$$(6'') \qquad 2I_n'(x_1 - x_0) - I_{n-1}(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_n(x_1-\xi)\, I_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0}\, d\xi\,.$$

Per determinare ora la funzione φ dall'equazione (1) si moltiplichino ambo i membri di essa per $\dfrac{I_1(x_1 - x)}{x_1 - x}\, dx$ e s'integri poi, rispetto ad x, fra 0 ed x_1. Troviamo così col solito scambio delle integrazioni e con l'aiuto

[1] Questi Rendiconti. Seduta 31 maggio 1913.

della (6''),

$$\int_0^{x_1} \varphi(\xi) \{ 2I'_n(x_1 - \xi) - I_{n-1}(x_1 - \xi) \} d\xi = \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{I_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx ,$$

da cui, supponendosi $n > 0$,

$$(7) \qquad \int_0^{x_1} \varphi(\xi)\, I_{n-1}(x_1 - \xi)\, d\xi = 2\Phi'(x_1) - \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{I_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx .$$

A questo modo siamo passati dall'equazione (1) ad un'equazione analoga in cui n è sostituito con $n - 1$. Ripetendo n volte questo procedimento si perverrà ad una equazione integrale di prima specie il cui nucleo sarà $I_0(x_1 - \xi)$ e che quindi sappiamo risolvere.

La formola di risoluzione della equazione (1), a cui così perveniamo, si semplifica tenendo conto della identità

$$(8) \qquad 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{I_1(x_1 - x)}{x_1 - x} = \int_x^{x_1} \frac{I_1(x_1 - \xi)}{x_1 - \xi} \frac{I_1(\xi - x)}{\xi - x} d\xi ,$$

la quale è un caso particolare di un'identità più generale che presto dimostreremo.

II.

Poniamo, per n, nella (6''), una volta $n - 1$ ed un'altra volta $n + 1$. Sommando e sottraendo le due equazioni, risultanti, membro a membro, otteniamo le altre due equazioni seguenti:

$$(9) \qquad 2 \frac{\partial}{\partial x_1} I'_n(x_1 - x_0) - I'_{n-1}(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I'_n(x_1 - \xi)\, I_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0} d\xi ,$$

$$(10) \qquad 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{I_n(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{n-1}{n} \frac{I_{n-1}(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_n(x_1 - \xi)}{x_1 - \xi} \frac{I_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0} d\xi .$$

Queste equazioni fanno dipendere la risoluzione delle equazioni integrali di Volterra di prima specie i cui nuclei sono $I'_n(x_1 - x)$, $\dfrac{I_n(x_1 - x)}{x_1 - x}$ dalla risoluzione delle equazioni analoghe i cui nuclei sono, rispettivamente, $I'_0(x_1 - x) = I_1(x_1 - x)$ e $\dfrac{I_1(x_1 - x)}{x_1 - x}$, la prima delle quali sappiamo risolvere. Vogliamo mostrare che anche l'altra, cioè

$$(11) \qquad \int_0^{x_1} \varphi(x) \frac{I_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx = \Phi(x_1) ,$$

si può agevolmente risolvere. Da essa abbiamo infatti, a causa della (8) che si deduce dalla (10) per $n = 1$,

$$\int_0^{x_1} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{I_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{I_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx .$$

Sottraendo questa equazione, membro a membro, da quella che si ottiene derivando la (11) rispetto ad x_1, abbiamo subito

$$\varphi(x_1) = 2\Phi'(x_1) - \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx . \tag{12}$$

III.

Passiamo adesso a risolvere l'altra equazione

$$\int_0^x \varphi(\xi)\, (x - \xi)^n\, \mathrm{I}_n(x - \xi)\, d\xi = \Phi(x) , \qquad n > 0 \tag{13}$$

supposto, naturalmente, che essa sia possibile. Deriviamo perciò la (13), rispetto ad x, tenendo conto della relazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x - \xi)^n\, \mathrm{I}_n(x - \xi)\right] = (x - \xi)^n\, \mathrm{I}_{n-1}(x - \xi) . \tag{14}$$

Perveniamo così all'altra equazione

$$\int_0^x \varphi(\xi)\, (x - \xi)^n\, \mathrm{I}_{n-1}(x - \xi)\, d\xi = \Phi'(\xi) . \tag{15}$$

Deriviamo ancora la (15) rispetto ad x nei due modi seguenti: una volta considerando la funzione $(x - \xi)^n\, \mathrm{I}_{n-1}(x - \xi)$ come prodotto di $x - \xi$ e di $(x - \xi)^{n-1}\, \mathrm{I}_{n-1}(x - \xi)$ ed applicando ancora la (14), un'altra volta considerando la stessa funzione come prodotto di $(x - \xi)^n$ e di $\mathrm{I}_{n-1}(x - \xi)$ ed applicando la terza delle (4). Si arriva così alle equazioni:

$$\int_0^x \varphi(\xi)\, (x - \xi)^{n-1}\, \mathrm{I}_{n-1}(x - \xi)\, d\xi + \\ + \int_0^x \varphi(\xi)\, (x - \xi)^n\, \mathrm{I}_{n-2}(x - \xi)\, d\xi = \Phi''(x) ,$$

$$n \int_0^x \varphi(\xi)\, (x - \xi)^{n-1}\, \mathrm{I}_{n-1}(x - \xi)\, d\xi + \\ + \int_0^x \varphi(\xi)\, (x - \xi)^n\, \mathrm{I}_{n-2}(x - \xi)\, d\xi = 2\Phi''(x) - \Phi(x)$$

e, sottraendo, membro a membro, la prima dalla seconda, si trova

$$\int_0^x \varphi(\xi)\, (x - \xi)^{n-1}\, \mathrm{I}_{n-1}(x - \xi)\, d\xi = \frac{1}{2n - 1}\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right) \Phi(x) . \tag{16}$$

Con ripetuta applicazione di questo procedimento, abbiamo

$$\int_0^x \varphi(\xi)\, \mathrm{I}_0(x - \xi)\, d\xi = \frac{1}{1 . 3 . 5 \ldots (2n - 1)}\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)^n \Phi(x) \tag{16'}$$

equazione, questa, che sappiamo risolvere.

IV.

Alla funzione $I_n(t)$ si dà un significato per ogni valore di n convenendo che

$$(17) \qquad I_n(t) = \sum_0^\infty {}_i \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2i}}{i!\,\Pi(n+i)} \quad , \quad \Pi(\alpha) = \Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^\alpha\, dx\,.$$

Anche in questa ipotesi più generale vale la relazione (14), e quindi, data l'equazione integrale (13) con n qualunque, vale pure sempre la (16) per lo stesso valore di n. Quando n è la metà di un intero dispari, ripetendo il procedimento di riduzione $n - \frac{1}{2}$ volte, dalla (13) si ottiene

$$(18) \qquad \int_0^x \varphi(\xi)\,(x-\xi)^{\frac{1}{2}}\, I_{\frac{1}{2}}(x-\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\,.\,4\,.\,6\,...\,(2n-1)}\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)^{n-\frac{1}{2}} \Phi(x)\,,$$

ossia, notando che

$$(x-\xi)^{\frac{1}{2}}\, I_{\frac{1}{2}}(x-\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathrm{Sen}\,(x-\xi)\,,$$

dove il simbolo $\mathrm{Sen}\,(x-\xi)$ indica il seno iporbolico di $x-\xi$, anche

$$(18') \qquad \int_0^x \varphi(\xi)\, \mathrm{Sen}\,(x-\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\,.\,4\,.\,...\,(2n-1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)^{n-\frac{1}{2}} \Phi(x)\,.$$

E basta derivare due volte, rispetto ad x, questa equazione, per avere

$$(19) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\,.\,4\,.\,6\,...\,(2n-1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)^{n+\frac{1}{2}} \Phi(x)\,.$$

Sappiamo quindi risolvere la (13) anche quando n è la metà di un intero dispari, anzi in questo caso essa si risolve con solo operazioni di derivazione.

V.

Sia data ora l'equazione a derivate parziali a coefficienti costanti di tipo iperbolico

$$(20) \qquad \sum_1^n {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \varphi = 0\,.$$

e proponiamoci di integrarla col metodo delle caratteristiche di Riemann-Volterra.

L'equazione precedente corrisponde soltanto ad un tipo particolare di equazioni iperbolichè a coefficienti costanti. Il caso generale è stato preso in considerazione dal Coulon nella sua bella tesi [1], ma esso dà luogo ad un problema d'inversione avente caratteri diversi e più complessi di quello a cui dà luogo il caso particolare che abbiamo preso in esame ed a cui soltanto vogliamo attenerci.

Escludiamo momentaneamente il caso $n = 1$ di cui vogliamo occuparci a parte più tardi. Allora l'ipercono caratteristico dell'equazione (20) che ha il vertice nel punto (x_i, t) dello spazio lineare (ξ_i, τ), nel quale, come si suole, faremo le nostre considerazioni, ha per equazione

$$(21) \qquad (t-\tau)^2 - r^2 = 0 \quad , \quad r^2 = \sum_1^n {}_i (x_i - \xi_i)^2 .$$

Questo ipercono divide lo spazio lineare ad $n+1$ dimensioni (ξ_i, τ) in tre regioni indefinite e connesse, cioè quella in cui $r^2 > (t-\tau)^2$ e le due in cui $r^2 < (t-\tau)^2$ con $\tau > t$, ovvero con $\tau < t$, e di queste tre regioni soltanto le ultime due sono semplicemente connesse. Noi vogliamo applicare il metodo di Riemann-Volterra solo in una di queste due ultime regioni e, per fissare le idee, stabiliremo di rimanere nella ragione in cui $r^2 < (t-\tau)^2$, $\tau < t$.

La soluzione fondamentale, nel metodo di Riemann-Volterra, non è completamente determinata come accade, invece, nel metodo di Riemann propriamente detto, per $n = 1$; circostanza, questa, che è lungi dal riuscire di imbarazzo. Noi sceglieremo queste soluzioni fondamentali com'è stato fatto dal Coulon, ponendo:

$$(22) \quad \varphi' = (t-\tau)^\lambda \, \psi(\theta) \, f(z) \quad , \quad \theta = \frac{r^2}{(t-\tau)^2} \quad , \quad z = \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2} .$$

Sostituendo, per φ, questa espressione di φ', nella (20), si vede subito che la detta equazione è soddisfatta assoggettando le due funzione ψ ed f a soddisfare alle equazioni:

$$(23) \qquad \theta(1-\theta)\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \left(\frac{n}{2} + \frac{2\lambda - 3}{2}\theta\right)\frac{d\psi}{d\theta} - \frac{\lambda}{2}\frac{\lambda - 1}{2}\psi = 0 ,$$

$$(24) \qquad \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{n + 2\lambda}{z}\frac{df}{dz} - f = 0 .$$

La funzione φ' dev'essere determinata in modo che, per $z = 0$, ossia sulla varietà conica caratterisrica $(t-\tau)^2 - r^2 = 0$, si annulli e per $r = 0$ sia:

$$\lim_{r=0} r^{n-1} \varphi' = 0 \quad , \quad \lim r^{n-1} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = \mathrm{G}(t-\tau) ,$$

G essendo il simbolo di funzione determinata.

[1] Paris, Hermann, 1902.

L'integrale della (24) che resta finito per $z=0$ è determinato a meno di un fattore costante e lo assumeremo sotto la forma

$$(25)\qquad z^{-\frac{n+2\lambda-1}{2}}\,\mathrm{I}_{\frac{n+2\lambda-1}{2}}(z)\,.$$

Possiamo prendere inoltre, per ψ, la funzione

$$(26)\qquad \psi=\theta^{\frac{2-n}{2}}(1-\theta)^{\frac{n+2\lambda-1}{2}}\,\mathrm{F}\left(\frac{\lambda+2}{2}\,,\,\frac{\lambda+1}{2}\,,\,\frac{n+2\lambda+1}{2}\,,\,1-\theta\right),$$

dove F è il simbolo di funzione ipergeometrica; questa funzione, infatti, soddisfa alla (23) e si annulla per $\theta=1$ se

$$(27)\qquad n+2\lambda-1>0.$$

λ resta allora arbitrario essendo, fissato n, soggetto soltanto a soddisfare alla diseguaglianza precedente ed alle altre condizioni perchè la serie

$$\mathrm{F}\left(\frac{\lambda+2}{2}\,,\,\frac{\lambda+1}{2}\,,\,\frac{n+2\lambda+1}{2}\,,\,1\right)$$

sia convergente, ossia alle altre condizioni:

$$(27')\qquad n+\lambda-1>0\,,\,\lambda+2>0\,,\,n-2>0.$$

Lasciamo da parte il caso $n=2$ che si presenta con caratteri eccezionali e di cui desideriamo occuparci in seguito. Non diremo parola sul caso $n=3$ di cui ci siamo occupati nelle Note precedenti, e supporremo perciò che sia $n\geq 4$. In questa ipotesi soddisfacciamo alle condizioni (27) e (27′) prendendo $\lambda=-1$ e quindi

$$(26')\qquad \psi=\theta^{\frac{2-n}{2}}(1-\theta)^{\frac{n-3}{2}}=\left(\frac{t-\tau}{r}\right)^{n-2}\left[1-\frac{r^2}{(t-\tau)^2}\right]^{\frac{n-3}{2}}.$$

Scegliendo φ' a questo modo, abbiamo:

$$\lim_{r=0} r^{n-1}\,\varphi'=0\quad,\quad \lim_{r=0} r^{n-1}\frac{\partial\varphi'}{\partial r}=(2-n)\,(t-\tau)^{\frac{n-3}{2}}\,\mathrm{I}_{\frac{n-3}{2}}(t-\tau).$$

Chiamando poi Σ_n la porzione di una varietà regolare ad n dimensioni la quale abbia la proprietà di essere incontrata, generalmente, in un punto solo da ogni parallela all'asse τ, nello spazio $(\xi_i\,,\tau)$, compresa nell'interno della regione $r^2<(t-\tau)^2\,,\tau<t$, avremo, subito, col solito procedimento, indicando con φ una soluzione regolare della (16) e con $\mathrm{D}\varphi$ il simbolo di derivata conormale,

$$(28)\qquad 2(n-2)\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{t_0}^{t}\varphi(x_i\,,\tau)\,(t-\tau)^{\frac{n-3}{2}}\,\mathrm{I}_{\frac{n-3}{2}}(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_{\Sigma_n}(\varphi\mathrm{D}\varphi'-\varphi'\mathrm{D}\varphi)\,d\Sigma_n\,,$$

dove t_0 indica il valore di τ nel punto d'incontro di Σ_n con la retta $r=0$.

Nella equazione (28) n è un numero intero maggiore di 3 e quindi, per quello che abbiamo precedentemente stabilito, sappiamo determinare la funzione φ qualunque sia $n > 3$.

VI.

A solo titolo di complemento a ciò che è stato precedentemente esposto, aggiungiamo le osservazioni seguenti. Nel caso $n = 1$ si ha un solo tipo di equazioni iperboliche a coefficienti costanti che può sempre ridursi alla forma

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \varphi = 0\,, \tag{29}$$

e questa equazione s'integra nel modo più felice col metodo delle caratteristiche di Riemann propriamente detto. Questa integrazione può, però, conseguirsi anche col metodo di Riemann-Volterra.

Le due caratteristiche uscenti dal punto $(x\,,t)$ del piano $(\xi\,,\tau)$ dividono questo piano in quattro regioni illimitate semplicemente connesse, e le nostre considerazioni possono aver luogo, indifferentemente, in una qualunque di esse. Restiamo in quella in cui $\xi \leq \tau$ e $\tau < t$, e supponiamo che sia limitata da una linea s.

La retta $\xi = x$ divide la regione finita così risultante in due regioni parziali: una adiacente alla caratteristica $\xi - \tau = x - t$, e l'altra adiacente alla caratteristica $\xi + \tau = x + t$. Basta allora applicare il teorema di reciprocità in ciascuna di queste due regioni, assumendo come funzione fondamentale, nella prima,

$$[(t-\tau)-(x-\xi)]\,\frac{\mathrm{I}_1\left(\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2}}\,,$$

e, nella seconda

$$[(t-\tau)+(x-\xi)]\,\frac{\mathrm{I}_1\left(\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2}}\,,$$

e combinare fra loro le due equazioni risultanti per pervenire subito ad una equazione come la seguente

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(x\,,\tau)\;\frac{\mathrm{I}_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau = \text{funz. nota}$$

che sappiamo risolvere.