ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Représentation d'une fonctionnelle continue, satisfaisant à la condition du cycle fermé.* Nota di R. GATEAUX, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Dans une Note présentée le 1er mars 1914 à l'Accademia dei Lincei, j'ai indiqué une représentation d'une fonctionnelle continue $U|[z(t)]_{-\infty}^{\infty}|$ d'une fonction réelle continue $z(t)$. M. Volterra m'a fait remarquer que ce résultat pouvait sans doute être appliqué aux fonctionnelles satisfaisant à la condition du cycle fermé.

Pour tous renseignements sur la question du cycle fermé, on pourra se reporter au chapître VII des *Leçons sur les fonctions de lignes* de M. Volterra (Paris, Gauthier-Villars, 1913).

I. — Le principe du cycle fermé.

2. Soit, dans le champ réel, une fonctionnelle $U|[z(t)]_{-\infty}^{\theta}|$ de la fonction $z(t)$ définie et continue ainsi que ses p premières dérivées pour $t \leq \theta$.

On dit que cette fonctionnelle *satisfait à la condition du cycle fermé* si, toutes les fois que $z(t)_{-\infty}^{\infty}$ admet la période T, la fonction de θ, $U|[z(t)]_{-\infty}^{\theta}|$, admet aussi la période T.

On dit qu'elle *satisfait à la condition de l'invariabilité de l'hérédité dans le temps*, si la condition

$$U\,|[z(t)]_{-\infty}^{\theta}| = U\,|[z(t+\lambda)]_{-\infty}^{\theta-\lambda}|$$

est vérifiée quel que soit le nombre λ et pour toute fonction $z(t)_{-\infty}^{\theta}$.

3. M. Volterra a démontré une proposition qu'il a appelée *principe du cycle fermé* et que j'énonce d'abord sous la forme générale suivante:

La condition du cycle fermé et la condition de l'invariabilité de l'hérédité dans le temps, sont équivalentes s'il y a dissipation des actions héréditaires; c'est-à-dire si la fonctionelle $U|[z(t)]_{-\infty}^{\theta}|$ est très peu modifiée quand on modifie arbitrairement $z(t)$ pour les valeurs de t inférieures à une certaine limite $\theta - l$.

Avant d'énoncer le principe sous une forme précise, je pose une définition.

Soient $z(t)$ une fonction déterminée ; $z_1(t)$ une fonction qui tend, avec ses p premières dérivées, vers la fonction $z(t)$ et ses p dérivées correspondantes, la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini.

Si, quel que soit le nombre μ positif ou nul, $\mathrm{U}\left|\left[z_1\left(t \underset{-\infty}{\overset{\theta-\mu}{+}} \mu\right)\right]\right|$ tend vers $\mathrm{U}\left|\left[z\left(t \underset{-\infty}{\overset{\theta-\mu}{+}} \mu\right)\right]\right|$ uniformément par rapport à μ, je dirai que $\mathrm{U}\left|\left[\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}\right]\right|$ est *continue d'ordre* p, p pouvant prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots$.

Traduisons cette condition en inégalités : étant donnés la fonction $\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}$ et le nombre positif ε, on peut déterminer η et l positifs, tels que, si l'on a, dans l'intervalle $(\theta - l, l)$,

$$|z_1(t) - z(t)| < \eta, \; |z_1'(t) - z'(t)| < \eta, \ldots, |z_1^{(p)}(t) - z^{(p)}(t)| < \eta,$$

on ait, quel que soit le nombre μ positif ou nul,

$$\left|\mathrm{U}\left|\left[z_1\left(t \underset{-\infty}{\overset{\theta-\mu}{+}} \mu\right)\right]\right| - \mathrm{U}\left|\left[z\left(t \underset{-\infty}{\overset{\theta-\mu}{+}} \mu\right)\right]\right|\right| < \varepsilon.$$

Ceci posé, j'utiliserai le principe sous la forme suivante :

Si la fonctionnelle $\mathrm{U}\left|\left[\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}\right]\right|$ ***satisfait à la condition du cycle fermé, et si elle est continue d'ordre p, elle vérifie la condition de l'invariabilité de l'hérédité dans le temps.***

Inversement, si elle satisfait à la condition de l'invariabilité de l'hérédité dans le temps, elle vérifie la condition du cycle fermé.

II. — Représentation.

4. Le théorème précédent va nous permettre de donner une représentation d'une fonctionnelle $\mathrm{U}\left|\left[\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}\right]\right|$ continue d'ordre p et satisfaisant à la condition du cycle fermé. Cette fonctionnelle vérifie la relation

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{U}\left|\left[\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}\right]\right| = \mathrm{U}\left|\left[z\left(t \underset{-\infty}{\overset{0}{+}} \theta\right)\right]\right|.$$

Tout revient donc à trouver une représentation de $\mathrm{U}\left|\left[\underset{\infty}{\overset{0}{z(t)}}\right]\right|$.

5. J'indique d'abord quelques définitions dont j'aurai besoin par la suite.

Soit θ_0 un nombre déterminé pouvant prendre la valeur $+\infty$. Soit C un ensemble de fonctions $\overset{\theta_0}{\underset{-\infty}{z(t)}}$ continues, ainsi que leurs p premières dérivées. Je dirai que l'ensemble C est *compact d'ordre p* si de toute infinité de fonctions de C on peut extraire une suite de fonctions tendant, avec leurs p premières dérivées, vers une fonction limite et ses p premières dérivées, la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini.

Je dirai qu'un ensemble Γ de fonctions $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}$, les nombres θ étant finis, est un *ensemble* - C_p, si l'ensemble des fonctions $\overset{0}{\underset{-\infty}{z(t+\theta)}}$, qu'on déduit de toutes les fonctions de Γ, est compact d'ordre p.

6. Je vais utiliser quelques résultats de ma Note du 1er mars (page 311, II, 2). Je les rappelle ici, et comme je me suis mal exprimé dans l'énoncé de l'un d'eux, j'en profite pour le rectifier.

Dans cette Note j'ai désigne par Ω l'ensemble des fonctions continues $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{z(t)}}$, et par $\Omega(A, B)$ l'ensemble de ces fonctions telles que $A(t) \leq z(t) \leq B(t)$, A et B étant deux fonctions continues.

Soient n un nombre entier positif et $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\zeta_n(t)}}$ une fonction ainsi définie :

$$\zeta_n(t) = \begin{cases} z(t) & \text{quand } |z(t)| \leq n \\ n & \text{quand } z(t) > n \\ -n & \text{quand } z(t) < -n. \end{cases}$$

Si $U\left|\left[\overset{\infty}{\underset{-\infty}{z(t)}}\right]\right|$ *est une fonctionnelle définie et continue d'ordre* 0 *dans* Ω *on peut la représenter par l'expression*

$$U\left|\left[\overset{\infty}{\underset{-\infty}{z(t)}}\right]\right| = \lim_{n\to\infty} \left\{ K_{n,0} + \sum_{s=1}^{n} \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} K_{n,s}(t_1, \dots, t_s)\, \zeta_n(t_1) \dots \zeta_n(t_s)\, dt_1 \dots dt_s \right\},$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble compact d'ordre 0 *de fonctions* $z(t)$.

$K_{n,0}$ est une constante ; $K_{n,s}$ une fonction continue.

Dans le cas où $U\left|\left[\overset{\infty}{\underset{-\infty}{z(t)}}\right]\right|$ *n'est définie et continue d'ordre* 0 *que dans un domaine* $\Omega(A, B)$, *on peut éviter l'emploi des* $\zeta_n(t)$ *et donner pour* U *une représentation de la forme précédente où* $\zeta_n(t)$ *serait remplacée par* $z(t)$.

7. *Fonctionnelle continue d'ordre* 0 *satisfaisant à la condition du cycle fermé.*

Si cette fonctionnelle est $U\left|\left[z\left(\underset{-\infty}{\overset{\theta}{t}}\right)\right]\right|$, il nous faut d'abord une représentation de $U\left|\left[z\left(\underset{-\infty}{\overset{0}{t}}\right)\right]\right|$. Appliquons les résultats du n° 6, en prenant 0 comme limite supérieure des intégrales.

Supposons d'abord la fonctionnelle *définie pour toutes les fonctions continues* $z\left(\underset{-\infty}{\overset{\theta}{t}}\right)$: c'est-à-dire supposons qu'il y ait lieu d'envisager des actions de grandeur illimitée. Alors, les fonctions $\zeta_n\left(\underset{-\infty}{\overset{\theta}{t}}\right)$ étant définies comme au n° 6 à partir de la fonction $z\left(\underset{-\infty}{\overset{\theta}{t}}\right)$, on a

$$U\left|\left[z\left(\underset{-\infty}{\overset{0}{t}}\right)\right]\right| = \lim_{n\to\infty}\left\{K_{n,0} + \sum_{s=1}^{rn}\int_{-n}^{0}\cdots\int_{-n}^{0}K_{n,s}(t_1,\ldots,t_s)\,\zeta_n(t_1)\ldots\zeta_n(t_s)\,dt_1\ldots dt_s\right\},$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble compact d'ordre 0 de fonctions $z\left(\underset{-\infty}{\overset{0}{t}}\right)$.

Si nous appliquons l'égalité (1), et effectuons le changement de variables $t_k + \theta = \tau_k$, nous obtenons la représentation

$$U\left|\left[z\left(\underset{-\infty}{\overset{\theta}{t}}\right)\right]\right| = \lim_{n\to\infty}\Big\{K_{n,0} +$$
$$+\sum_{s=1}^{rn}\int_{\theta-n}^{\theta}\cdots\int_{\theta-n}^{\theta}K_{n,s}(\tau_1-\theta,\ldots,\tau_s-\theta)\,\zeta_n(\tau_1)\ldots\zeta_n(\tau_s)\,d\tau_1\ldots d\tau_s\Big\},$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble - C_0 *de fonctions* $z\left(\underset{-\infty}{\overset{\theta}{t}}\right)$.

Dans le cas où l'on ne considère que des actions de grandeur limitée, c'est-à-dire que *des fonctions* $z\left(\underset{-\infty}{\overset{\theta}{t}}\right)$ *au plus égales, en valeur absolue, à un certain nombre positif* M, on peut simplifier l'expression précédente en écrivant $z(\tau)$ au lieu de $\zeta_n(\tau)$.

8. *Fonctionnelle continue d'ordre p satisfaisant à la condition du cycle fermé.* — La condition de continuité est d'autant plus générale et moins restrictive pour la fonctionnelle que p est plus élevé.

Soit n un nombre entier positif. Désignons par $\zeta_{n.p}\left(\underset{-\infty}{\overset{\theta}{t}}\right)$ les fonctions définies de la façon suivante à partir de la dérivée d'ordre p de la fonction $z\left(\underset{-\infty}{\overset{\theta}{t}}\right)$:

$$\zeta_{n,p}(t) = \begin{cases} z^{(p)}(t) & \text{quand } |z^{(p)}(t)| \leq n \\ n & \text{quand } z^{(p)}(t) > n \\ -n & \text{quand } z^{(p)}(t) < -n . \end{cases}$$

Si la fonctionnelle $\mathrm{U}\left|\left[z(t)\right]_{-\infty}^{\theta}\right|$ est *définie pour toutes les fonctions* $z(t)_{-\infty}^{\theta}$ *admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre* p, on démontre qu'elle admet la représentation

$$\mathrm{U}\left|\left[z(t)\right]_{-\infty}^{\theta}\right| = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \mathrm{K}_{n,0} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{r_n} \int_{\theta-n}^{\theta} \cdots \int_{\theta-n}^{\theta} \mathrm{K}_s\left[\tau_1 - \theta , \ldots , \tau_s - \theta ; z(\theta) , z'(\theta) , \ldots , z^{(p-1)}(\theta)\right] \times$$

$$\times \zeta_{n,p}(\tau_1) \ldots \zeta_{n,p}(\tau_s)\, d\tau_1 \ldots d\tau_s \Big\} ,$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble $\cdot \mathrm{C}_p$ *de fonctions* $z(t)_{-\infty}^{\theta}$.

$\mathrm{K}_{n,0}$ est une constante; K_s une fonction continue par rapport à l'ensemble de ses $s+p$ variables.

Dans le cas où l'on ne considère que *des fonctions* $z(t)_{-\infty}^{\theta}$ *dont la dérivée d'ordre* p *est au plus égale, en valeur absolue, à un nombre positif* M, on peut simplifier l'expression précédente en écrivant $z^{(p)}(\tau)$ au lieu de $\zeta_{n,p}(\tau)$.

9. *Cas de convergence uniforme.* — Reprenons le cas d'une fonctionnelle continue d'ordre 0 satisfaisant à la condition du cycle fermé. Supposons, de plus, que les actions $z(t)$ ne puissent dépasser, en valeur absolue, un certain nombre positif M. Alors

$$\mathrm{U}\left|\left[z(t)\right]_{-\infty}^{0}\right| = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \mathrm{K}_{n,0} + \sum_{s=1}^{r_n} \int_{-n}^{0} \cdots \int_{-n}^{0} \mathrm{K}_{n,s}(t_1 , \ldots , t_s)\, z(t_1) \ldots z(t_s)\, dt_1 \ldots dt_s \Big\} \tag{2}$$

$$\mathrm{U}\left|\left[z(t)\right]_{-\infty}^{\theta}\right| = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \mathrm{K}_{n,0} + \sum_{s=1}^{r_n} \int_{\theta-n}^{\theta} \cdots \int_{\theta-n}^{\theta} \mathrm{K}_{n,s}(\tau_1 - \theta , \ldots , \tau_s - \theta)\, z(\tau_1) \ldots z(\tau_s)\, d\tau_1 \ldots d\tau_s \Big\} . \tag{3}$$

La convergence de la représentation (3) n'est généralement pas uniforme dans tout le domaine D des fonctions continues $\left|z(t)_{-\infty}^{\theta}\right| \leq \mathrm{M}$.

Elle l'est en même temps que celle de la représentation (2). Or j'ai étudié ce dernier problème dans ma Note du 1[er] mars (page 313), dans le cas où l'intervalle de variation de t est $(-\infty , \infty)$. On passe sans difficulté au cas où cet intervalle est $(-\infty, 0)$. Finalement, on obtient le théorème suivant:

Théorème. — *Soit* $U|[z(t)]|_{-\infty}^{\theta}$ *une fonctionnelle satisfaisant à la condition du cycle fermé, définie dans le domaine* D *des fonctions continues telles que* $|z(t)|_{-\infty}^{\theta} \leq M$. *Pour qu'elle admette une représentation* (3), *la convergence étant uniforme dans* D, *il faut et il suffit qu'étant donné* ε:

1°) *on puisse déterminer* l *et* η *positifs tels que, si l'on a, dans l'intervalle* $(\theta - l, \theta)$, $|z_1(t) - z_2(t)| < \eta$, *on ait*

$$\left| U|[z_1(t)]|_{-\infty}^{\theta} - U|[z_2(t)]|_{-\infty}^{\theta} \right| < \varepsilon ;$$

2°) *on puisse déterminer* l' *positif et une division de l'intervalle* $(-l', 0)$ *au moyen de points* $-l'_1, \ldots, -l'_p$, *de telle sorte que, si* $z_1(t)$ *et* $z_2(t)$ *ont la même valeur moyenne dans chacun des intervalles partiels* $(\theta - l', \theta - l'_1), \ldots, (\theta - l'_p, \theta)$, *on ait*

$$\left| U|[z_1(t)]|_{-\infty}^{\theta} - U|[z_2(t)]|_{-\infty}^{\theta} \right| < \varepsilon .$$

Les conditions ainsi imposées à U, correspondent au cas où les actions ont une intensité limitée, où deux séries d'actions dont les intensités sont voisines depuis un temps assez long conduisent à des états actuels voisins, et où les actions oscillatoires à haute fréquence n'agissent que par leurs valeurs moyennes.

Matematica. — *Un limite inferiore dei moduli delle differenze tra le radici di due equazioni algebriche.* Nota di G. Sannia, presentata dal Socio E. d'Ovidio.

1. Siano

$$(1) \qquad f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0 ,$$
$$(2) \qquad g(z) \equiv b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m = 0 ,$$

due equazioni algebriche intere a coefficienti reali o complessi, non aventi radici comuni. Proponiamoci di cercare un limite inferiore μ dei moduli delle differenze tra le radici

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad ; \quad y_1, y_2, \ldots, y_m$$

delle due equazioni.

Consideriamo perciò il loro *risultante*

$$(3) \qquad R = \prod_{r,s} (x_r - y_s) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n ; s = 1, 2, \ldots, m),$$

che è una funzione razionale dei coefficienti, perfettamente nota.

Detto A un numero maggiore dei moduli delle radici della (1) [1], e

[1] Tale è il massimo tra i numeri

$$(a) \qquad \left|\frac{a_1}{a_0}\right| + 1, \left|\frac{a_2}{a_0}\right| + 1, \ldots, \left|\frac{a_n}{a_0}\right| + 1,$$

o un numero maggiore.