ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

cas où cet intervalle est $(-\infty, 0)$. Finalement, on obtient le théorème suivant:

Théorème. — *Soit* $\mathrm{U}\left|\left[z(t)\right]\right|_{-\infty}^{\theta}$ *une fonctionnelle satisfaisant à la condition du cycle fermé, définie dans le domaine* D *des fonctions continues telles que* $\left|z(t)\right|_{-\infty}^{\theta} \leq \mathrm{M}$. *Pour qu'elle admette une représentation* (3), *la convergence étant uniforme dans* D, *il faut et il suffit qu'étant donné* ε:

1°) *on puisse déterminer* l *et* η *positifs tels que, si l'on a, dans l'intervalle* $(\theta - l, \theta)$, $|z_1(t) - z_2(t)| < \eta$, *on ait*

$$\left|\mathrm{U}\left|\left[z_1(t)\right]\right|_{-\infty}^{\theta} - \mathrm{U}\left|\left[z_2(t)\right]\right|_{-\infty}^{\theta}\right| < \varepsilon ;$$

2°) *on puisse déterminer* l' *positif et une division de l'intervalle* $(-l', 0)$ *au moyen de points* $-l'_1, \dots, -l'_p$, *de telle sorte que, si* $z_1(t)$ *et* $z_2(t)$ *ont la même valeur moyenne dans chacun des intervalles partiels* $(\theta - l', \theta - l'_1), \dots, (\theta - l'_p, \theta)$, *on ait*

$$\left|\mathrm{U}\left|\left[z_1(t)\right]\right|_{-\infty}^{\theta} - \mathrm{U}\left|\left[z_2(t)\right]\right|_{-\infty}^{\theta}\right| < \varepsilon .$$

Les conditions ainsi imposées à U, correspondent au cas où les actions ont une intensité limitée, où deux séries d'actions dont les intensités sont voisines depuis un temps assez long conduisent à des états actuels voisins, et où les actions oscillatoires à haute fréquence n'agissent que par leurs valeurs moyennes.

Matematica. — *Un limite inferiore dei moduli delle differenze tra le radici di due equazioni algebriche.* Nota di G. Sannia, presentata dal Socio E. d'Ovidio.

1. Siano

$$(1) \qquad f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0 ,$$

$$(2) \qquad g(z) \equiv b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m = 0 ,$$

due equazioni algebriche intere a coefficienti reali o complessi, non aventi radici comuni. Proponiamoci di cercare un limite inferiore μ dei moduli delle differenze tra le radici

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad ; \quad y_1, y_2, \dots, y_m$$

delle due equazioni.

Consideriamo perciò il loro *risultante*

$$(3) \qquad \mathrm{R} = \prod_{r,s} (x_r - y_s) \qquad (r = 1, 2, \dots, n ; s = 1, 2, \dots, m),$$

che è una funzione razionale dei coefficienti, perfettamente nota.

Detto A un numero maggiore dei moduli delle radici della (1) [1], e

[1] Tale è il massimo tra i numeri

$$(a) \qquad \left|\frac{a_1}{a_0}\right| + 1, \left|\frac{a_2}{a_0}\right| + 1, \dots, \left|\frac{a_n}{a_0}\right| + 1,$$

o un numero maggiore.

detto B un numero non minore dei moduli delle radici della (2), si ha

$$|x_r| < A \,, \quad |y_s| \leq B \,,$$

quindi

$$|x_r - y_s| \leq |x_r| + |y_s| < A + B \,;$$

e dunque si sostituisce $A + B$ a ciascun fattore del prodotto

$$|R| = \prod_{r,s} |x_r - y_s| \,, \tag{4}$$

tranne che ad un sol fattore, si ottiene

$$|x_r - y_s| > |R| : (A + B)^{nm-1} \,.$$

Dunque: *il numero positivo*

$$\mu = |R| : (A + B)^{nm-1} \tag{5}$$

è minore dei moduli delle differenze tra le radici delle due equazioni (1) (2), *prive di radici comuni.*

2. Supponiamo, in particolare, che la (2) sia l'equazione derivata della (1):

$$g(z) = f'(z) \equiv na_0 z^{n-1} + (n-1)\, a_1 \,, z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} = 0 \,. \tag{6}$$

Allora $m = n - 1$, R si riduce al *discriminante* D della (1), e come numero B, non minore dei moduli delle radici di (7), si può assumere lo stesso A [1]; dunque: *il numero positivo*

$$\nu = |D| : (2A)^{n(n-1)-1} \tag{7}$$

è minore dei moduli delle differenze tra le radici di una equazione (1), *priva di radici multiple, e le radici dell'equazione derivata* (6).

3. Ciò vale, in particolare, quando si suppongono reali i coefficienti della (1). Allora vale pure il teorema di Rolle: « tra due radici reali consecutive α e β ($\alpha < \beta$) della (1) cade un numero dispari di radici dell'equazione derivata ». Ora, per quanto precede, noi possiamo aggiungere che: *queste radici cadono tutte nell'intervallo più piccolo* $(\alpha + \nu \,, \beta - \nu)$, *ove* ν *è il numero* (7) [2].

[1] Poichè A, essendo non minore dei numeri (4), non è neppure minore dei numeri

$$\frac{n-1}{n}\left|\frac{a_1}{a_0}\right| + 1 \,, \frac{n-2}{n}\left|\frac{a_2}{a_0}\right| + 1 \,, \ldots, \frac{1}{n}\left|\frac{a_{n-1}}{a_0}\right| + 1 \,,$$

e quindi non è minore dei moduli delle radici della (a).

[2] Un teorema analogo, enunciato da Laguerre e dimostrato dal Cesàro (Nouvelles Annales de math., 3ème série, tom. IV, pag. 328), dà per ν il valore $\frac{\beta - \alpha}{n}$. *Però esso suppone che le radici dell'equazione siano tutte reali.*

Ne segue subito che: *il numero*

$$\lambda = 2\nu = 2|D| : (2A)^{n(n-1)-1} \tag{8}$$

è minore dei moduli delle differenze tra le radici reali della (1) [1].

4. Ritornando al teorema generale del § 1, applichiamolo supponendo che l'equazione (2) sia di primo grado,

$$g(z) \equiv z - \alpha = 0\,,$$

con la radice α reale o complessa. Allora, per la (4), si ha

$$|R| = \prod_r |x_r - \alpha| = |f(\alpha)| : |a_0|\,;$$

inoltre si può assumere $B = |\alpha|$.

Otteniamo così il teorema: *se α è un numero qualunque (reale o complesso) non radice dell'equazione* (1), *il numero positivo*

$$\mu(\alpha) = |f(\alpha)| : |a_0|(A + |\alpha|)^{n-1} \tag{9}$$

è minore dei moduli delle differenze tra il numero α e le radici x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) della (1).

5. Questa proprietà della funzione $\mu(\alpha)$, suggerisce un nuovo *metodo di approssimazione* delle radici di una equazione algebrica. Per maggior chiarezza, lo esporremo sotto forma geometrica.

Incominciamo con l'osservare che nel piano rappresentativo della variabile complessa z, i punti x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), immagini delle radici della (1), saranno tutti contenuti nell'interno del cerchio Γ' che ha per centro il punto (origine) $z = 0$, e per raggio A.

Osserviamo inoltre che: *i punti x_i sono tutti esterni rispetto ad ogni cerchio C_r che abbia per centro un punto qualsiasi α_r, non radice di* (1), *e per raggio $\mu(\alpha_r)$*. Ciò non è che l'interpretazione geometrica del teorema del § 4.

Or prendiamo entro Γ', o sulla sua periferia, un punto α_1 e descriviamo il corrispondente cerchio C_1: esso staccherà da Γ' una regione Γ_1, tale che nel suo interno e sulla sua periferia non cadranno punti x_i. Sia Γ_1' la rimanente parte di Γ' (nella quale cadranno i punti x_i). Preso in Γ_1 o sul

[1] La conoscenza di un tal numero è utile nell'operazione della *separazione* delle radici reali della (1) col noto metodo di Waring-Lagrange. Allo stesso scopo Cauchy dette il numero analogo

$$\sqrt{|\Delta|} : (2A)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}\,,$$

ove Δ indica pure il discriminante di (1), come D nella (8); però Δ differisce in generale da D per un fattore, potenza di a_0.

contorno (e precisamente sulla parte di contorno interna a Γ') un punto α_2, descriviamo il corrispondente cerchio C_2: questo staccherà eventualmente [1] da Γ_1' una parte che, aggregata a Γ_1, determinerà una regione più ampia Γ_2 che, come Γ_1, non conterrà punti x_i. Sia Γ_2' la rimanente regione di Γ' (nella quale cadranno tutti i punti x_i). Preso dentro Γ_2 o sul contorno un punto α_3, descriviamo il corrispondente cerchio C_3: esso staccherà eventualmente da Γ_2' una parte che, aggregata a Γ_2, determinerà una regione Γ_3, più ampia di Γ_2, e che, come questa, non conterrà punti x_i. E così via, con procedimento analogo a quello che si segue nella *prosecuzione analitica* delle funzioni di variabile complessa.

Si ha così una successione di regioni (tutte d'un sol pezzo) $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$, ciascuna contenente la precedente e tali che in esse (contorno incluso) mai cadono punti x_i.

Crescendo r, la regione Γ_r andrà estendendosi nel cerchio Γ' e (insinuandosi fra gli n punti x_i) tenderà a ricoprire tutto il cerchio Γ', ad eccezione dei punti x_i, i quali così finiranno per essere separati ed approssimati di quanto si vuole.

Ciò è quasi intuitivo; ma può dimostrarsi rigorosamente. A tal fine basterà dimostrare che: *dato ad arbitrio in Γ' (contorno incluso) un punto β, che non sia un punto x_i, esso è sempre raggiungibile con la costruzione precedente.*

Infatti, si congiunga il punto β col punto α_1 (punto iniziale della costruzione precedente) mediante una linea s tutta contenuta in Γ' e non passante per alcun punto x_i; poi si costruiscano, successivamente: la circonferenza C_1 corrispondente al punto α_1; la circonferenza C_2 corrispondente al punto α_2 ove C_1 incontra l'arco $\alpha_1 \beta$ di s, la circonferenza C_3 corrispondente al punto α_3 ove C_2 incontra l'arco $\alpha_2 \beta$ di s, ecc. Dico che, così procedendo, si finirà per incontrare un cerchio C_r contenente β nel suo interno o sulla sua periferia.

Infatti i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sono evidentemente legati da una relazione ricorrente, del tipo

$$(10) \qquad \alpha_{r+1} = \alpha_r + \mu(\alpha_r)\, e^{i\varphi_r},$$

ove $i = \sqrt{-1}$, e $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sono numeri reali. Se con la costruzione precedente non si finisse per incontrare il detto cerchio C_r, la costruzione stessa si potrebbe continuare indefinitamente, ottenendo, su s, infiniti punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ susseguentisi (in questo ordine) sulla linea s nell'arco finito $\alpha_1 \beta$. Questi punti ammetterebbero perciò un punto limite l (*giacente su s*); e, per la (10), si avrebbe

$$\lim_{r=\infty} \left[\mu(\alpha_r)\, e^{i\varphi_r} \right] = l - l = 0 .$$

[1] Ciò accadrà certamente se α_2 si è preso sul contorno di Γ_1.

Ma $e^{i\varphi_r}$ è sempre finito e diverso da zero; dunque $\lim_{r=\infty} \mu(\alpha_r) = 0$, ossia, per la (9),

$$\lim_{r=\infty} \frac{|f(\alpha_r)|}{|a_0|(\mathrm{A} + |\alpha_r|)^{n-1}} = \frac{|f(l)|}{|a_0|(\mathrm{A} + |l|)^{n-1}} = 0,$$

cioè $f(l) = 0$. Dunque l coinciderebbe con un punto x_i, e quindi la curva s passerebbe per un punto x_i, contro l'ipotesi fatta.

6. La funzione $\mu(\alpha)$ può anche essere adoperata per approssimare le radici *reali* di un'equazione (1).

Infatti, dato un numero reale α_0, non radice della (1), si costruiscano le due successioni di numeri reali:

(11) $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ove $\alpha_{r+1} = \alpha_r + \mu(\alpha_r)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$

e

(12) $\alpha_0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \ldots$ ove $\alpha_{r-1} = \alpha_r - \mu(\alpha_r)$ $(r = 0, -1, -2, \ldots)$.

Essendo la funzione $\mu(\alpha)$ sempre positiva, per α non radice di (1), la prima successione è crescente, e la seconda è decrescente, e però *entrambe tendono a limiti finiti o infiniti*, che diremo rispettivamente L ed l.

Supponiamo che L sia finito. Allora, ragionando sulla relazione ricorrente (11) come poc'anzi abbiamo fatto sulla (10), si riconosce che L è radice di (1). E siccome, per la proprietà della funzione $\mu(\alpha)$ (§ 4), nessuna radice di (1) può cadere negli intervalli (α_0, α_1), (α_1, α_2), (α_2, α_3), ..., se ne deduce che L è la più piccola radice di (1) maggiore di α_0. Se ne deduce, inoltre, che, se $\mathrm{L} = +\infty$, non vi è alcuna radice di (1) maggiore di α_0.

Analogamente si vede che: se l è finito, l è radice di (1), ed è la più grande radice che sia minore di α_0; se $l = -\infty$, non esistono radici di (1) minori di α_0.

Dunque, mediante le successioni (11) e (12), possiamo approssimarci alla radice immediatamente superiore ed alla radice immediatamente inferiore ad un numero reale dato, α_0.