ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 aprile 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. Nel § 3 della mia Nota: *Sulle equazioni alle derivate funzionali* [1], ho messo in luce la relazione fra equazioni integro-differenziali del 1° ordine ed equazioni alle derivate funzionali, limitandomi al caso della linearità per esamineare l'esempio più semplice. Mi permetto ora di estendere i detti resultati.

2. Sia $F|[\theta(\xi)\overset{1}{\underset{0}{}}, x, z]|$ una funzione che dipende da tutti i valori di $\theta(\xi)$ nell'intervallo $0, 1$ e da due parametri x e z. Se $\theta(\xi)$ dipenderà anche da un parametro α, avremo che F sarà una funzione ordinaria di x, z, α; ed in particolare, se prendereremo $z = \alpha$, F sarà una funzione ordinaria di x, z. Prendiamo dunque $\theta(\xi) = f(\xi, z)$ e consideriamo [2]

$$F|[f(\xi, z)\overset{1}{\underset{0}{}}, x, z]|$$

e l'equazione

$$\frac{\partial f(x, z)}{\partial z} = F|[f(\xi, z)\overset{1}{\underset{0}{}}, x, z]|. \tag{1}$$

[1] Rend. R. Accad. dei Linei, 1, 15 marzo 1914.

[2] Cfr. la nota al § 3 della citata Memoria, pag. 395.

Per semplicità supponiamo che $F|[\theta(\xi), x, z]|$ possa considerarsi indipendente dalle derivate di $\theta(\xi)$ [1]; allora diremo che la (I) è una *equazione integro-differenziale del 1° ordine per rapporto a* z.

Per giustificare questa denominazione, basta pensare che F, sotto certe condizioni almeno, potrà esprimersi o per mezzo di una serie analoga a quella di Taylor [2] o analoga a quelle polinomiali di Weierstrass [3], e quindi, per mezzo di integrazioni multiple applicate alla f.

Nel caso particolare in cui F è della forma

$$\int_0^1 f(\xi, z)\, \varphi(x, \xi)\, d\xi,$$

in cui $\varphi(x, \xi)$ è una funzione determinata, si ricade nella equazione integro-differenziale considerata nel § 3 della Nota citata.

3. Supponiamo l'assoluta continuità di F rispetto agli elementi variabili; e supponiamo che, qualunque siano x e z, purchè $1 \geq x \geq 0$, $a + l \geq z \geq a - l$, si abbia

$$\left| F|[\theta(\xi), x, z]| - F|\theta_1(\xi), x, z]| \right| < A\varepsilon,$$

se $|\theta(\xi) - \theta_1(\xi)| < \varepsilon$ per ξ compreso fra 0 e 1, e $\theta(\xi)$ e $\theta_1(\xi)$ compresi fra $\psi(\xi) + k$ e $\psi(\xi) - k$; ove A denota una certa quantità costante e $\psi(\xi)$ una funzione continua. Allora, applicando il metodo delle approssimazioni successive, l'integrale della equazione precedente si potrà mettere sotto la forma

$$f(x, z) = \psi(x) + \Theta|[\psi(\xi), x, z]|, \tag{1}$$

in cui Θ si annulla per $z = a$. La detta forma dell'integrale f sarà valida per $1 \geq x \geq 0$, e z compreso in un certo intorno del punto a. È evidente che $\psi(x)$ rappresenta il valore iniziale di $f(x, z)$ per $z = a$.

L'equazione (I) si può anche scrivere

$$f(x, z) = \lambda\psi(x) + \int_a^z F|[f(\xi, \zeta), x, \zeta]|\, d\zeta, \tag{I'}$$

la quale dovrà coincidere colla (1) se si fa il parametro costante λ eguale ad 1.

[1] Considereremo in altri lavori il caso adesso escluso.

[2] Volterra, *Équations intégrales et intégro-différentielles*, pag. 24, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

[3] Cfr. Gateaux, *Sur la représentation des fonctionnelles continues*. Rend. Lincei, 21 dicembre 1913, pag. 646. Le serie analoghe a quelle polinomiali di Weierstrass furono date dapprima dal sig. Fréchet.

Nella ipotesi, che la $F|[\overset{1}{\underset{0}{\theta(\xi)}}, x, z]|$ sia sviluppabile in serie analoga a quella di Taylor rispetto a $\theta(\xi)$, ed i nuclei dei varî termini siano funzioni olomorfe di z nell'intorno di $z = a$, si potrà sviluppare $f(x, z)$ in serie di potenze di λ e di $z - a$, seguendo un procedimento analogo a quello che ho impiegato nel § XVI del Cap. III delle mie lezioni sulle equazioni integrali ed integro-differenziali. In tal caso ci si può evidentemente estendere, per rapporto a z, dal campo reale al campo complesso.

Consideriamo z come un parametro costante, e risolviamo l'equazione (1) rispetto a $\psi(x)$ (²). Avremo

$$\psi(x) = f(x, z) + \Theta_1|[\overset{1}{\underset{0}{f(\xi, z)}}, x, z]|.$$

Si riconosce facilmente che, se si indica con

$$\Phi|[\overset{1}{\underset{0}{\theta(x)}}]|,$$

una quantità che dipende arbitrariamente da $\theta(x)$ per x compresa fra 0 e 1 (senza punti eccezionali), e se per $\theta(x)$ si sostituisce

$$\varphi(x) + \Theta_1|[\overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, x, z]|$$

si avrà

$$\Phi\left|\left[\varphi(x) + \Theta_1|[\overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, x, z]|\right]\right| = \Omega|[\overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, z]|,$$

la quale soddisfa l'equazione alle derivate funzionali

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} + \int_0^1 \Omega'|[\overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, z, x]|\, F|[\overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, x, z]|\, dx = 0,$$

ove

$$\Omega'|[\overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, z, x]|$$

denota la derivata di Ω rispetto a φ fatta nel punto x. Questa proposizione costituisce una facile estensione del teorema dato nella precedente Nota (§ 3).

4. Di speciale interesse sono le equazioni del tipo canonico.

Abbiasi

$$H|[\overset{1}{\underset{0}{f(\xi)}}, \overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, z]|,$$

(¹) Cfr. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, chap. IV.

e supponiamo che, nell'ipotesi di z costante, sia

$$\delta H = \int_0^1 H'_f |[f(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), \varphi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), z, x]| \, \delta f(x) \, dx +$$
$$+ \int_0^1 H' |[f(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), \varphi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), z, x]| \, \delta\varphi(x) \, dx.$$

Le equazioni

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial q(x, z)}{\partial z} = H'_\varphi |[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z), p(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z), z, x]| \\ \dfrac{\partial p(x, z)}{\partial z} = - H'_f |[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z), p(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z), z, x]| \end{cases}$$

si diranno di tipo canonico.

Siano le derivate di

$$\text{(2)} \qquad \Phi |[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), z]|,$$

fatte rispetto a $q(\xi)$ e $a(\xi)$ pel punto x, respettivamente

$$\text{(3)} \qquad \Phi'_q |[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), z, x]| \quad , \quad \Phi'_a |[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), z, x]| \, .$$

Denotiamole, per semplicità, con

$$\text{(4)} \qquad \Phi'_q(z, x) \quad , \quad \Phi'_a(z, x) \, .$$

Se Φ, non ha punti eccezionali, e soddisfa l'equazione alle derivate funzionali

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + H |[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), \Phi'_q(z, \overset{1}{\underset{0}{\xi}}), z]| = 0 \, ,$$

gl'integrali delle equazioni (II) si potranno ricavare dalle relazioni

$$\text{(5)} \quad \begin{cases} \Phi'_a |[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z), a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), z, x]| = b(x) \\ \Phi'_q |[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z), a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), z, x]| = p(x, z) \, , \end{cases}$$

ove $b(x)$ rappresenta un funzione continua arbitraria, purchè si ammetta, inoltre, che, nell'ipotesi di z e x e $a(\xi)$ invariabili, sia

$$\delta \Phi'_a |[q(\xi), a(\xi), z, x]| = A \delta q(x) + \int_0^1 \Phi''_{aq} |[q(\xi), a(\xi), z, x, y]| \, \delta q(y) \, dy \, ,$$

e l'equazione integrale

$$A \psi(x) + \int_0^1 \Phi''_{aq} |[q(\xi), a(\xi), z, x, y]| \, \psi(y) \, dy = \theta(x)$$

abbia, almeno entro un certo campo, per la incognita $\psi(x)$ una soluzione unica, determinata e finita [1].

5. Nella ipotesi che H non contenga z, prendiamo Φ indipendente da z, onde sopprimiamo nelle espressioni (2), (3) e (4) la variabile z e scriviamo queste ultime

$$\Phi'_q(x) \quad , \quad \Phi'_a(x) . \tag{4'}$$

Supponiamo che, invece della (III), sia soddisfatta la relazione

$$h + \mathrm{H}\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) \quad , \quad \Phi'_q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| = 0 , \tag{IV}$$

con

$$h = \Omega\,|[a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| \quad , \quad \delta h = \int_0^1 \Omega'_a\,|[a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , x]|\,\delta a(x)\,dx .$$

Allora, alle (5), potremo sostituire le altre

$$\left\{\begin{aligned} &\Phi'_a\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} , z) , a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , x]| = b(x) + z\,\Omega'_a\,|[a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , x]| \\ &\Phi'_q\,|q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} , z) , a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , x]| = p(x , z) . \end{aligned}\right. \tag{5'}$$

6. Come esempio mi permetto di svolgere un caso particolare che corrisponde al caso di Stäckel della separazione delle variabili [2].

Sia $g(x , y , q(x)) = \gamma(x , y)$ una funzione composta di $q(x)$ nel senso ordinario.

Calcoliamo $\Gamma(x , y)$, tale che il teorema di reciprocità sia soddisfatto [3],

$$\gamma(x , y) + \Gamma(x , y) = -\int_0^1 \gamma(x , \xi)\,\Gamma(\xi , y)\,d\xi ,$$

nell'ipotesi del determinante diverso da zero. $\Gamma(x , y)$ dipenderà da tutti i valori di $q(x)$ per x compreso fra 0 e 1, onde potremo scrivere

$$\Gamma(x , y) = \mathrm{G}\,|[x , y , q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| .$$

[1] Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. IV.

[2] Cfr. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, tomo I, Leipzig 1902, pag 77 e seg.

[3] Volterra, *Équations intégrales et intégro-différentielles*, pag. 105.

Prendiamo

$$A\,|[x\,,\,q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| = 2\lambda(x) + 2\int_0^1 G\,|[x\,,\,y\,,\,q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]|\,\lambda(y)\,dy$$

$$U\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| = \frac{1}{2}\int_0^1 A\,|[x\,,\,q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]|\,\psi(x\,,\,q(x))\,dx\,,$$

ove $\lambda(x)$ è una funzione arbitraria e $\psi(x\,,\,q(x))$ pure una funzione arbitraria composta, nel senso ordinario, di $q(x)$.

Formiamo

$$H\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})\,,\,p(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| = \frac{1}{2}\int_0^1 A\,|[x\,,\,q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]|\,p^2(x)\,dx - U\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]|\,.$$

Ciò premesso, calcoliamo

$$F(x\,,\,q) = \int_0^q \sqrt{\psi(x\,,\,q) + a(x) + \int_0^1 a(\xi)\,g(x\,,\,\xi\,,\,q)\,d\xi\,dq}$$

$$\Phi\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})\,a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| = \int_0^1 F(x\,,\,q(x))\,dx\,.$$

Si dimostra che

$$\int_0^1 A\,|[x\,,\,q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]|\,\Phi_q'^2(x)\,dx = 2U\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| + 2\int_0^1 \lambda(\xi)\,a(\xi)\,d\xi\,,$$

ossia che l'equazione (IV) è soddisfatta prendendo

$$h = \int_0^1 \lambda(\xi)\,a(\xi)\,d\xi\,.$$

Gli integrali (5′) saranno quindi

$$(5'')\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{q(x,z)} \frac{dq}{\sqrt{D(x\,,\,q)}} + \int_0^1 dy \int_0^{q(y,z)} \frac{g(y\,,\,x\,,\,q)\,dq}{\sqrt{D(y\,,\,q)}} = \lambda(x)\,z + b(x) \\ \sqrt{D(x\,,\,q(x\,,\,z))} = p(x\,,\,z)\,. \end{cases}$$

7. L'annullarsi della variazione dell' integrale

$$\int_0^{z_0} \left\{ H\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\,,\,z)\,,\,p(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\,,\,z)\,,\,z]| - \int_0^1 \frac{\partial q(\xi\,,\,z)}{\partial z}\,p(\xi\,,\,z)\,d\xi \right\} dz\,,$$

facendo variare di infinitamente poco q e p, conduce evidentemente alle equazioni integro-differenziali (II), e quindi alla equazione alle derivate funzionali (III).

8. È interessante di mettere a confronto i tipi diversi di equazioni alle derivate funzionali che si manifestano allorchè si parte da equazioni alle derivate parziali [1] o da equazioni integro-differenziali, derivanti, le une e le altre, da questioni di calcolo delle variazioni.

9. Problemi meccanici che conducano ad equazioni del tipo (II) si presentano, per esempio, allorchè si considerano sciami di corpuscoli del tipo di quelli che si presentano nello studio dell'anello di Saturno, che possono sotto un certo aspetto trattarsi come sistemi continui senza che fra gli elementi esistano vincoli esprimibili con equazioni di tipo differenziale.

Chimica. — *Sopra gli azossifenoli* [2]. Nota del Socio Angelo Angeli.

Nel mentre gli azossifenoli della forma:

$$(HO) . R . (N_2O) . R . (OH)$$

dove R rappresenta un residuo aromatico, si possono facilmente preparare riducendo, nelle opportune condizioni, i nitroderivati:

$$(HO) . R . NO_2$$

e perciò sono sostanze accessibili ed anche bene studiate, le nostre conoscenze sopra gli azossifenoli aromatici che nella loro molecola contengono un solo ossidrile,

$$R . N_2O) . R . (OH)$$

sono ancora quanto mai limitate ed incerte.

Nella letteratura si trova menzionato un paraossiazossibenzolo.

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 . (OH)$$

che venne preparato ancora nel 1870 da Kekule ed Hidegh [3] per trattamento del paraossiazobenzolo,

$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 (OH)$$

[1] Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. III, § 8.

[2] Lavoro eseguito nel R. Istituto di studî superiori in Firenze.

[3] Ber. Berichte, *3*, 235 (1870).