ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Nel benzolo, da cui venne separata la precedente sostanza è contenuto un altro prodotto, molto più solubile in questo solvente. Si presenta in aghetti gialli che fondono verso 175°, ed è del pari solubile negli alcali.
gr. 0.1446 di sostanza diedero c. c. 20,5 di azoto a 14°,2 e 743 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{18}H_{14}N_4O_3$
N	16,48	16,76

Tanto queste sostanze, come anche la precedente, abbruciano con grandissima difficoltà; fondono tutte in liquidi torbidi (cristalli liquidi), e ciò rende molto difficile il poter stabilire con sicurezza se una delle forme non contenga ancora piccole quantità degli isomeri assieme ai quali si ottiene.

Mi riservo lo studio ulteriore degli azossifenoli, e soprattutto di determinare la struttura degli isomeri che finora sono riuscito a preparare.

Anche nell'esecuzione di una parte delle presenti ricerche ho avuto per collaboratore il dott. Bruno Valori al quale esprimo i miei ringraziamenti.

Meccanica. — *Sopra le azioni a cui è soggetto un corpo entro una massa liquida in movimento.* Nota del Corrispondente E. Almansi.

1. In due Note comparse di recente in questi stessi Rendiconti, ho esaminato il problema a cui si accenna nel titolo, supponendo che il movimento della massa liquida ammettesse un potenziale di velocità [1].

Io voglio ora esaminare il problema delle azioni esercitate sopra un corpo, nella ipotesi che il liquido abbia il movimento più generale, potendosi, anche in tal caso, stabilire alcune formule notevolmente semplici, e non prive d'interesse.

Su questo argomento, del quale ebbi già ad occuparmi (seguendo, però, una via diversa) in altre mie pubblicazioni degli anni 1909-10, io ritorno qui brevemente, affinchè in queste ultime tre Note si trovino raccolti tutti i risultati che nelle mie ricerche intorno al problema di cui si tratta, ho potuto stabilire.

2. Chiamo σ la superficie che limita il corpo C pel quale si vuole esaminare l'azione esercitata dalla massa che lo circonda. Questa sarà poi limitata da una, o da più altre superficie, il cui insieme denoterò con Σ_0. Si ammetterà che sopra le particelle liquide non agiscano forze di massa. La densità sarà supposta uguale ad 1.

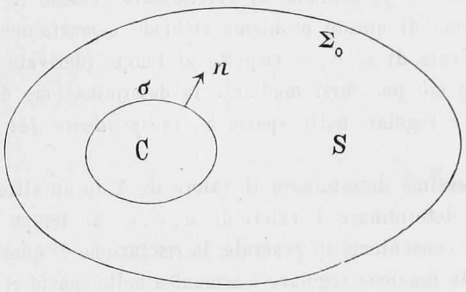
[1] *Sopra le azioni* ecc., a. 1913, 2° sem., fasc. 11°; *Sulle attrazioni newtoniane di origine idrodinamica.* a. 1914, 1° sem., fasc. 5°.

In un punto qualunque di σ o Σ_0 chiamerò n la normale rivolta verso l'interno dello spazio S limitato da quelle superficie.

Riferiamo i punti dello spazio ad un sistema di assi coordinati fissi (x, y, z). Diremo α, β, γ i coseni direttori di n.

Sopra un elemento $d\sigma$ della superficie di C agirà una forza di componenti

$$-p\alpha\, d\sigma\ ,\quad -p\beta\, d\sigma\ ,\quad -p\gamma\, d\sigma\ ,$$



p denotando la pressione del liquido. Consideriamo le componenti della risultante di questo sistema di forze elementari, e i momenti del sistema rispetto agli assi. Una qualunque A di queste sei quantità possiamo rappresentarla mediante la formula

$$\mathrm{A} = -\int_\sigma p\lambda\, d\sigma\ , \tag{1}$$

se intendiamo che λ sia rispettivamente uguale ad

$$\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma\ ,$$

$$\gamma y - \beta z\ ,\ \alpha z - \gamma x\ ,\ \beta x - \alpha y\ .$$

Le formule che vogliamo stabilire permettono di operare sopra la (1), senza specificare il significato di λ. Solo occorre tener presente che si ha, in tutti i casi:

$$\int_\sigma \lambda\, d\sigma = 0\ . \tag{2}$$

Il problema che precisamente ci proponiamo è questo:

Le superficie σ e Σ_0 potranno essere rigide o deformabili, e, se rigide fisse o mobili. Per un periodo di tempo finito T noi supporremo di conoscere, in ogni istante, la configurazione delle superficie σ e Σ_0, e la loro posizione rispetto agli assi. Conosceremo allora, per tutto il tempo T, e in un punto qualunque P di σ o Σ_0, la componente secondo la normale n

della velocità da cui è animata la particella liquida attigua a P, ossia la quantità

$$N = u\alpha + v\beta + w\gamma ,$$

u , v , w essendo le componenti di velocità secondo gli assi.

Supporremo inoltre di conoscere *in un determinato istante* t_0 appartenente a T le componenti di velocità u , v , w *in tutto lo spazio* S occupato dal liquido. E noi ci proponiamo di determinare l'azione A *nell'istante* t_0.

La risoluzione di questo problema richiede essenzialmente la eliminazione delle derivate di u , v , w rispetto al tempo (derivate da cui dipende la pressione); e ciò può farsi mediante la determinazione di un'unica funzione armonica e regolare nello spazio S, *indipendente dal movimento del liquido.*

Se noi volessimo determinare il valore di A in un altro istante t, dovremmo prima determinare i valori di u , v , w al tempo t. Ma i mezzi dell'analisi non consentono, in generale, la risoluzione di questo problema [1].

3. Sia ψ la funzione regolare e armonica nello spazio S, che nei punti di σ soddisfa alla condizione

$$(3) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \lambda ,$$

e nei punti di Σ_0 alla condizione

$$(4) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 .$$

La funzione ψ esiste: se infatti diciamo Σ l'insieme delle superficie σ e Σ_0, vale a dire la superficie totale che limita lo spazio S, i valori assegnati a $\frac{\partial \psi}{\partial n}$, per le formule (3), (4) e (2), sono tali che si ha:

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Sigma = 0 .$$

Sarà evidentemente, in virtù della formula (1), e delle (3) e (4):

$$A = - \int_{\Sigma} p \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Sigma ,$$

[1] Io evito, insomma, in tutta questa trattazione, il problema fondamentale della Idrodinamica. Dato il movimento del liquido in un istante t_0, e il movimento delle superficie che lo limitano per un periodo di tempo finito T, io non mi domando come si moverà il liquido in un istante t di T; ma quali sono le resistenze nell'istante t_0 in cui il movimento del liquido è dato.

ovvero:

$$(5)\qquad A = -\int_{\Sigma} p\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial y}\beta + \frac{\partial\psi}{\partial z}\gamma\right) d\Sigma .$$

E se si trasforma l'integrale esteso a Σ in un integrale esteso allo spazio S, di cui Σ è il contorno, tenendo presente che ψ è una funzione armonica:

$$(6)\qquad A = \int_{S} p\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) dS .$$

Ora:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{du}{dt}\ ,\quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{dv}{dt}\ ,\quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{dw}{dt} .$$

Dunque:

$$(7)\qquad A = -\int_{S}\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) dS .$$

Poniamo:

$$(8)\qquad U = u\frac{\partial\psi}{\partial x} + v\frac{\partial\psi}{\partial y} + w\frac{\partial\psi}{\partial z} .$$

Sarà:

$$(9)\qquad \frac{dU}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial z} + u\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + v\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + w\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) .$$

Seguendo le notazioni consuete noi denotiamo con $\frac{df}{dt}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$, la derivata di una funzione f rispetto al tempo, calcolata seguendo una particella nel suo movimento, o fissando un punto dello spazio; in modo che si ha:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} .$$

Pertanto avremo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + u\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} + w\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z} ,$$

e formule analoghe per $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$; quindi:

$$u\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + v\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + w\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + W ,$$

essendo:

$$W = u^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + w^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} +$$
$$+ 2vw \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \, \partial z} + 2wu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \, \partial x} + 2uv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial y} .$$

Risolvendo l'equazione (9) rispetto al primo trinomio del 2° membro, e sostituendo al secondo trinomio l'espressione fornita da queste ultime, otterremo:

$$\frac{du}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{dw}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial z} =$$
$$= \frac{dU}{dt} - \left\{ u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right\} - W ,$$

onde la (7) darà:

$$(10) \quad A = - \int_S \frac{dU}{dt} dS + \int_S \left\{ u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right\} dS +$$
$$+ \int_S W \, dS .$$

Ora si ha, tanto se lo spazio S è fisso, quanto se è variabile:

$$\int_S \frac{dU}{dt} dS = \frac{d}{dt} \int_S U \, dS .$$

Ma per la formula (8):

$$\int_S U \, dS = \int_S \left(u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dS ;$$

quindi, integrando per parti, e tenendo presente la condizione d'incompressibilità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 :$$

$$(11) \quad \int_S U \, dS = - \int_\Sigma \psi (u\alpha + v\beta + w\gamma) \, d\Sigma = - \int_\Sigma \psi \, N \, d\Sigma .$$

Con una trasformazione analoga, il 2° integrale della formula (10) diventerà uguale a $- \int_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} N \, d\Sigma$. Onde avremo infine:

$$(12) \quad A = \frac{d}{dt} \int_\Sigma \psi \, N \, d\Sigma - \int_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} N \, d\Sigma + \int_S W \, dS .$$

Questa formula risolve il problema. V'intervengono infatti le quantità ψ ed N che sono indipendenti dal movimento del liquido; e (nella W) le componenti di velocità u, v, w, ma non le loro derivate rispetto al tempo.

4. È da notare che la formula (12) sussiste anche se nello spazio S vi sono delle superficie sulle quali la velocità è discontinua, come si riconosce facilmente esaminando le trasformazioni eseguite.

Consideriamo infatti un integrale del tipo

$$J = \int_S \left(f \frac{\partial F}{\partial x} + g \frac{\partial F}{\partial y} + h \frac{\partial F}{\partial z} \right) dS,$$

ove F, f, g, h rappresentino funzioni che potranno essere discontinue sopra superficie il cui insieme denoteremo con ω, e delle quali le ultime tre siano legate dalla relazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0. \tag{13}$$

Le superficie ω, opportunamente completate, se occorre (per es. se ω è una superficie aperta situata nell'interno di S), con altre che diremo ω_0, e sulle quali le discontinuità saranno nulle, divideranno lo spazio S in un certo numero m di spazî S_i. E sarà

$$J = \sum_1^m {}_i \int_{S_i} \left(f \frac{\partial F}{\partial x} + g \frac{\partial F}{\partial y} + h \frac{\partial F}{\partial z} \right) dS_i.$$

L'integrale esteso allo spazio S_i (in cui le funzioni sono continue) potremo trasformarlo in un integrale esteso alla superficie σ_i di S_i. Tenendo presente la relazione (13), e ponendo

$$E = -F.(f\alpha + g\beta + h\gamma),$$

ove α, β, γ denotano, nei punti di σ_i, i coseni della normale interna, avremo:

$$J = \sum_1^m {}_i \int_{\sigma_i} E\, d\sigma_i.$$

Ora l'insieme delle superficie σ_i è formato dalla superficie Σ che limita l'intero spazio S, e dalle due faccie delle superficie ω ed ω_0. Ma nei punti delle superficie ω_0, E ha, dalle due parti, valori uguali e di segno contrario, essendo ivi continue le F, f, g, h, ed essendo uguali e di segno contrario i coseni delle due normali; onde le superficie ω_0 non interverranno nella espressione di J. Se dunque nei punti di ω diciamo E ed E″ i valori di E dalle due parti, si avrà:

$$J = \int_\Sigma E\, d\Sigma + \int_\omega (E' + E'')\, d\omega.$$

Se poi la funzione F è continua nei punti di ω, e le funzioni f, g, h sono tali che la quantità $f\alpha + g\beta + h\gamma$ abbia dalle due parti di ω valori uguali e di segno contrario, sarà $E' + E'' = 0$, quindi

$$J = \int_\Sigma E\, d\Sigma .$$

come nel caso che non esistano discontinuità.

Questo appunto accade nelle trasformazioni d' integrali eseguite nel § 3: precisamente nella (5-6) $\left(F = p\,;\, f, g, h = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$, nella (8-11) $(F = \psi\,;\, f, g, h = u, v, w)$, e nell'altra analoga alla precedente $\left(F = \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$. La pressione p è infatti continua nello spazio S; la funzione ψ è continua con tutte le sue derivate; e se vi sono superficie su cui la velocità è discontinua, la componente $u\alpha + v\beta + w\gamma$ ha, secondo le due normali, valori uguali e di segno contrario.

5. Particolarmente interessante è il caso che il corpo C si muova di moto traslatorio uniforme, e che la superficie Σ_0 sia fissa.

La velocità normale N è allora nulla sopra Σ_0, e i due primi integrali della formula (12) risultano estesi alla sola superficie σ di C. Se poi supponiamo che il corpo si muova parallelamente all'asse delle x con velocità V_0, sarà sopra $\sigma N = V_0\alpha$; onde avremo:

$$\text{(14)} \qquad A = V_0 \left\{ \frac{d}{dt}\int_\sigma \psi\,\alpha\, d\sigma - \int_\sigma \frac{\partial\psi}{\partial t}\,\alpha\, d\sigma \right\} + \int_S W dS .$$

Ma la quantità entro parentesi, per una formula dimostrata nella prima delle due Note precedenti a questa (§ 2), è uguale ad $\int_\sigma \frac{\partial\psi}{\partial x} N\, d\sigma$, ossia a $V_0 \int_\sigma \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\alpha\, d\sigma$. Denotiamo poi le componenti di velocità, anzichè con u, v, w, con $V_0 u$, $V_0 v$, $V_0 w$ (supposto $V_0 \gtreqless 0$). Volendo conservare a W la sua espressione $u^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dots$, dovremo nella ultima formula sostituire W con $V_0^2 . W$; si avrà pertanto:

$$A = V_0^2 \left\{ \int_\sigma \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\alpha\, d\sigma + \int_S W\, dS \right\} ;$$

e denotando con $-K$ il coefficiente di V_0^2, che non dipende da V_0 (bensì dalla configurazione del sistema, e dal movimento del liquido nell'istante t_0):

$$A = -K . V_0^2 .$$

Possiamo chiamare *simili* quei movimenti i quali (nell' istante t_0 a cui si riferisce A) si ottengono uno dall'altro moltiplicando le componenti di velocità per una costante. Noi vediamo dunque che *per movimenti simili il valore di* A *è proporzionale al quadrato della velocità del corpo mobile.*

Sembra sia questa l'espressione più generale della legge di proporzionalità fra l'azione A — in particolare la componente della forza secondo la direzione del movimento, o *resistenza diretta* — e il quadrato della velocità del corpo; legge confermata, entro certi limiti, dall'esperienza [1].

Supponiamo che A rappresenti la resistenza diretta; e confrontiamo un movimento M col movimento *simile* M' ottenuto invertendo le velocità di tutte le particelle liquide. Dovrà cambiare di segno la velocità V_0 di C, ma V_0^2 e K non varieranno; e perciò non varierà, nè di grandezza, nè di segno, la resistenza A. Quindi avverrà o che A sia nulla per ambedue i movimenti, o che per uno di essi la resistenza abbia lo stesso senso del movimento del corpo.

Questo risultato è da considerarsi come un'estensione del noto *paradosso di D'Alembert.*

Si deve però tener presente che le formule qui stabilite valgono per qualunque movimento della massa liquida *compatibile col dato movimento del corpo* C; mentre i valori del coefficiente K forniti dalle osservazioni si riferiscono a quei movimenti particolari che sono *provocati dal movimento stesso di* C. Per tali movimenti K risulta positivo.

6. Se oltre ad esser fissa la superficie Σ_0 è anche immobile il corpo C, la formula (14), posto $V_0 = 0$, darà:

$$A = \int_S W\, dS. \tag{15}$$

In questo caso, se noi confrontiamo due movimenti simili della massa liquida, poichè W e quindi A risultano moltiplicate per il qnadrato della costante per cui si moltiplicano le componenti di velocità, avremo che i valori di A stanno tra loro come i quadrati della velocità in uno stesso punto dello spazio.

7. Si può dare di W un'espressione molto semplice.

In un punto qualunque dello spazio S siano, al tempo t_0, a, b, c, i coseni di direzione della velocità, e sia V la sua grandezza. Sarà $u = Va$, $v = Vb$, $w = Vc$, quindi:

$$W = V^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} a^2 + \cdots + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial z} bc + \cdots \right).$$

Ma la quantità entro parentesi non è altro che la derivata seconda della

[1] V. Levi-Civita, *Scie e leggi di resistenza,* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXIII, an. 1907.

funzione ψ rispetto alla direzione della velocità. Designando questa con ν avremo:

$$W = V^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \nu^2}.$$

8. Un'altra espressione si può dare della quantità W, e perciò di A. Essendo $U = u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z}$, sarà identicamente:

$$u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} +$$
$$+ \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} +$$
$$+ \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} + W.$$

Poniamo

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

denotiamo cioè con ξ, η, ζ le componenti del vortice. I coefficienti di $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$, nella formula precedente, sono uguali ad

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x} - (v\zeta - w\eta), \text{ ecc. } (V^2 = u^2 + v^2 + w^2).$$

Si avrà per conseguenza da quella formula, risoluta rispetto a W:

$$W = u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial V^2}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} + D,$$

ove:

$$D = (v\zeta - w\eta) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (w\xi - u\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial y} + (u\eta - v\xi) \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

ovvero:

$$D = \begin{vmatrix} u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

9. Supponiamo, come nel § 6, che le superficie σ e Σ_0 siano fisse. Varrà allora la formula (15), da cui, sostituendo a W l'espressione trovata, otterremo:

$$A = \int_S \left(u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} \right) dS -$$

$$- \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{\partial V^2}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dS + \int_S D \, dS .$$

Se rappresentiamo con ω l'insieme delle superficie sulle quali la velocità è discontinua, potremo eseguire sopra i due primi integrali la trasformazione esaminata nel § 4, ed avremo

$$A = \int_\Sigma E \, d\Sigma + \int_\omega (E' + E'') \, d\omega + \int_S D \, dS ,$$

essendo ora

(16) $$E = \frac{V^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial n} - UN .$$

Nei punti di Σ n denota la normale interna (§ 2). Nei punti di ω n rappresenta sia l'una che l'altra normale, N è la componente della velocità secondo n, E' ed E'' sono i valori di E dalle due parti (§ 4).

Ma osserviamo che nei punti di Σ, ossia delle superficie σ e Σ_0, che abbiamo supposte fisse, $N = 0$, quindi $E = \frac{V^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial n}$. Inoltre sopra σ $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \lambda$, sopra Σ_0 $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ (§ 3). Onde sarà:

(17) $$A = \frac{1}{2} \int_\sigma V^2 \lambda \, d\sigma + \int_\omega (E' + E'') \, d\omega + \int_S D \, dS .$$

Se lo spazio S non è semplicemente connesso, la massa liquida potrà essere in movimento senza che si abbiano nè superficie di discontinuità ω, nè vortici ($\xi = \eta = \zeta = 0$, $D = 0$). In tal caso avremo

(18) $$A = \frac{1}{2} \int_\sigma V^2 \lambda \, d\sigma ;$$

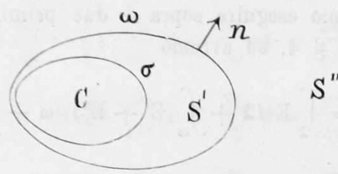
la quale formula poteva ottenersi direttamente dalle (1) e (2), essendo allora $p = -\frac{1}{2} V^2 + \text{cost.}$

10. Altro caso notevole è il seguente.

Si abbia nello spazio S una superficie di discontinuità ω, chiusa, e che contenga C nel suo interno, la quale superficie potrà anche, in parte, coincidere con σ. Noi ci avviciniamo così a quello che realmente accade nel caso di un corpo fisso investito da una corrente.

Diciamo S′ lo spazio compreso fra σ ed ω, S″ quella compreso fra ω e Σ_0. Nello spazio S′, e nell'istante t_0 a cui ci riferiamo, il liquido sia in quiete; nello spazio S″ (che supporremo a connessione multipla) il moto sia irrotazionale.

Potremo applicare la formula (17), in cui si dovrà porre $D = 0$, mancando i vortici in tutto lo spazio S. Inoltre, poichè nello spazio S′ non si



ha movimento, ed è nulla per conseguenza tanto la velocità V quanto la funzione U, sarà nullo l'integrale esteso a σ, e nell'integrale esteso ad ω sarà $E' = 0$, se intendiamo che E′ si riferisca alla faccia di ω rivolta verso S′. Quanto ad E″, poichè nei punti di ω la componente normale della velocità è nulla (il liquido essendo in quiete nello spazio S′), avremo dalla formula (16) $E'' = \dfrac{V^2}{2}\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$, ove s'intende che V rappresenti la velocità sulla faccia esterna di ω, n la normale esterna. Onde sarà per la (17):

$$A = \frac{1}{2}\int_\omega V^2 \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\omega\,.$$

Se ω viene a coincidere con σ, ove $\dfrac{\partial\psi}{\partial n} = \lambda$, ritroviamo la formula (18).