ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili.* Nota I del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

È noto che sopra una curva algebrica C, non può esistere un'infinità continua di sistemi lineari (completi) d'integrali abeliani di 1ª specie, riducibili (1).

Picard e Poincaré hanno da tempo indicato esempî di curve di genere $p > 1$, possedenti un'infinità discontinua d'integrali ellittici (integrali con due periodi ridotti) (2). In questa Nota mi propongo di mostrare l'esistenza di curve contenenti infiniti sistemi lineari di q (≥ 1) integrali con $2q$ periodi ridotti; e ciò anche all'infuori dei sistemi che s'ottengono ovviamente, sulle curve di Picard-Poincaré, combinando linearmente a due a due, a tre a tre, ecc., i loro integrali ellittici. Resta però sottinteso che, nel caso $q > 1$, non potrà esigersi, come accade sempre per $q = 1$, che ognuno degli infiniti sistemi sia riducibile al genere q (3), cioè che provenga da un'involuzione di genere q della curva sostegno, giacchè si sa anzi che non può esistere una curva algebrica con infinite involuzioni irrazionali di genere $q > 1$ (4).

(1) Pei concetti fondamentali relativi agl'integrali riducibili, veggansi, ad es., le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908). Ved. in particolare a pagina 340.

(2) Picard, *Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes*, etc. (Bulletin de la Société math. de France, tom. XI, 1883, pag. 25) pag. 47; Poincaré, *Sur la réduction des intégrales abéliennes* (Comptes rendus, tom. 99, 1884, pag. 853); *Sur les fonctions abéliennes* (American Journal, tom. 8, 1886, pag. 289).

(3) Nel trattato di Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Leipzig, Teubner, 1903) pag. 493; e nelle mie *Lezioni* citate, q integrali indipendenti, di 1ª specie, di una curva C di genere p ($> q$) diconsi *riducibili al genere* q, quando, mediante una sostituzione razionale, essi possono mutarsi nei q integrali di 1ª specie di una curva di genere q. Poincaré invece adotta questa locuzione anche quando si sappia soltanto che i q integrali hanno $2q$ periodi ridotti. In generale ciò non porta l'esistenza su C di un'involuzione di genere q, di gruppi di punti, ma sibbene l'esistenza di un'involuzione *abeliana*, sulla varietà dei gruppi di q punti di C.

(4) De Franchis, *Un teorema sulle involuzioni irrazionali* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tom. 36, 1913, pag. 368). Noterò di passaggio che oltre alla via, del resto assai semplice, indicata dal De Franchis, per stabilire la citata proposizione, si può seguire quest'altra. È chiaro (formola di Zeuthen) che le involuzioni di genere $q > 1$, sopra una C di genere p, hanno l'ordine limitato. Ma poichè le corrispondenze di dati indici. sopra una curva, si distribuiscono in un numero finito di sistemi continui (ved. il lemma geometrico al n. 4 della mia Memoria, *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica*, Math.

Darò qui un cenno della via seguìta e dei risultati ottenuti nel presente lavoro.

Per brevità un sistema lineare d'integrali riducibili, i cui periodi ridotti sieno in numero doppio a quello degl'integrali indipendenti contenuti nel sistema, si dirà un sistema *regolare*. Esso è necessariamente completo (¹).

Se sulla curva C, di genere p, esistono due sistemi regolari d'integrali riducibili, si presenta spontanea la considerazione del loro sistema lineare « congiungente » K, e del loro sistema lineare « intersezione » H. Poggiandomi sulle ricerche di Castelnuovo intorno alle varietà di Picard (²) e sopra una disuguaglianza fra il numero degl'integrali indipendenti (di 1ª specie) di un sistema d'integrali riducibili ed il numero dei loro periodi ridotti (³), dimostro che i sistemi H, K sono regolari, come i due sistemi dati (n. 1).

Ciò posto, si rappresentino gli ∞^{p-1} integrali di 1ª specie di C (⁴), coi punti di uno spazio lineare S_{p-1}, sicchè i sistemi regolari d'integrali riducibili, abbiano per imagini certi spazî lineari di S_{p-1}. Dalla proposizione riferita, segue subito che gli spazî successivamente dedotti, mediante proiezioni e sezioni, a partire da un gruppo di spazî imagini di più sistemi regolari, rappresentano nuovi sistemi regolari.

Ne deriva un'immediata ed elegante dimostrazione geometrica del teorema di Poincaré, circa l'esistenza d'infiniti integrali ellittici sopra una curva di genere p, che possegga $\mu + 1$ integrali ellittici dipendenti $(p \geq \mu \geq 2)$ (⁵). Nel caso $\mu = 3$, per esempio, sul piano rappresentativo del

---

Annalen, Bd. 74, 1913); così ne segue, in forza di un noto teorema di Humbert-Castelnuovo, che le involuzioni di genere > 1 sono esse pure in numero finito.

A proposito della mia Memoria citata dei Math. Annalen, colgo l'occasione per avvertire che negli enunciati dei nn. 19 e 20, relativi ad una corrispondenza T variabile colla curva generica di un sistema lineare $|C|$, almeno ∞^2, sopra una superficie, regolare o irregolare, F, va aggiunto in modo esplicito che, qualora $|C|$ sia composto con una involuzione I_n, la corrispondenza T non deve *far parte* della corrispondenza simmetrica $S(n-1, n-1)$, generata da I sopra ogni C. Del resto la dimostrazione del n. 19 esclude in modo evidente questo caso, da che in essa si suppone che il luogo dei punti omologhi di un dato x nelle T relative alle ∞^1 curve della rete $|C|$, che passan per x, sia una *curva*; mentre nel caso da escludersi, il luogo suddetto ridurrebbesi ad un gruppo di punti. I teoremi dei nn. 19, 20 valgono evidentemente, anche senza quest'esclusione esplicita, purchè si riferiscano a sistemi lineari *semplici* $|C|$, almeno ∞^2.

(¹) Cfr. le mie *Lezioni*, pag. 340.

(²) Castelnuovo, *Sugl'integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, (5), tom. XIV, 1905, pag. 593).

(³) Ved. le mie *Lezioni*, pag. 338.

(⁴) Consideriamo come identici due integrali che differiscano per una costante, additiva o moltiplicativa.

(⁵) *Sur les fonctions abéliennes* (cit.), pag. 305; Krazer (trattato citato), pag. 489.

sistema che congiunge i 4 integrali ellittici dati, si hanno 4 punti, a tre a tre indipendenti, A_1, A_2, A_3, A_4, imagini di quei 4 integrali. Orbene, le intersezioni a due a due delle rette congiungenti due degli A, o due dei nuovi punti che da essi via via deduconsi (rete di Möbius), rappresentano infiniti integrali ellittici contenuti nel sistema.

In generale si trova (restringendo leggermente la portata del teorema del n. 4) che se una curva C, di genere p, possiede $\mu + 1$ (≥ 3) sistemi regolari, a μ a μ indipendenti, d'integrali riducibili, tali che uno, A, di essi, di dimensione $q - 1$ (≥ 0), sia contenuto nel sistema che congiunge gli altri, la curva contiene un'infinità discontinua di sistemi analoghi ad A. Resta anche ben determinata la struttura di tale infinità, poichè si prova che quei sistemi possono coordinarsi biunivocamente ai vertici di una rete di Möbius di specie $\mu - 1$ (individuata da $\mu + 1$ punti a μ a μ indipendenti di un $S_{\mu-1}$). Va considerato in modo speciale soltanto il caso $\mu = 2$, perchè allora il gruppo degli spazî rappresentativi dei tre dati sistemi, non è capace di definirne altri, come A, mediante operazioni *interne* di proiezione e sezione. Ma da $\mu = 2$ si risale agevolmente a $\mu = 3$, con un'opportuna operazione di *ampliamento* (n. 2) del sistema congiungente i tre dati. La rete di Möbius (di specie 1) coordinata alla totalità dei sistemi regolari ∞^{q-1} esistenti su C, è allora costituita dai punti d'una retta derivanti da tre di essi, mediante successive costruzioni di quarti armonici.

Allorquando i $\mu + 1$ sistemi dati sieno della stessa dimensione $q - 1$ — e a questo caso ci si può sempre ridurre — gl'infiniti sistemi regolari che da essi derivano, costituiscono quella che chiamo una *configurazione normale di sistemi d'integrali riducibili*. Tale configurazione è studiata al n. 5 (Nota II) ove si determina anche il minimo continuo, cui appartengono tutti i suoi sistemi regolari.

Naturalmente questi risultati possono riferirsi, non soltanto agl'integrali abeliani propriamente detti, ma anche agl'integrali semplici di prima specie d'una varietà. Basta considerare, in luogo d'una varietà di Jacobi, una varietà di Picard.

Il n. 7 (Nota II) è dedicato a stabilire l'esistenza effettiva di varietà (o curve) algebriche soddisfacenti ai teoremi sopra riferiti. E nel n. 8 (Nota II) espongo infine una dimostrazione analitica del teorema generale del n. 4.

1. Sistemi congiungente e intersezione di due dati sistemi regolari. Sistemi complementari. — Sia V una varietà di Picard (o di Jacobi) a p dimensioni, la quale possegga due sistemi regolari A_1, A_2, contenenti rispettivamente q_1, q_2 integrali riducibili di prima specie, indipendenti.

Gl' integrali di A_1 sono allora costanti lungo le varietà *algebriche* W' a $p-q_1$ dimensioni di un sistema ∞^{q_1}, d'indice 1, appartenente a V [1], e, similmente, le varietà W'', di livello costante degl' integrali di A_2, sono algebriche, a $p-q_2$ dimensioni, e formano un sistema ∞^{q_2}, pure d' indice 1.

Sulla varietà *algebrica* W a $d\,(\leq p)$ dimensioni, riempita dalle W'' che escono dai punti di una W' genericamente fissata, son costanti tutti gl' integrali eventualmente comuni ai due sistemi, giacchè essi lo sono tanto lungo le W' come lungo le W''.

Pel teorema di Castelnuovo, or ora citato a pie' di pagina, ne deriva che il sistema, evidentemente lineare, formato da tutti gli eventuali integrali comuni ai due sistemi A_1, A_2, è regolare. Dunque:

Il sistema intersezione di due dati sistemi regolari d' integrali riducibili, è regolare.

Passiamo a considerare il sistema congiungente dei due dati sistemi A_1, A_2, cioè il minimo sistema lineare d' integrali semplici di 1ª specie di V, che li contiene entrambi.

Qualora si rappresenti il sistema lineare S degli ∞^{p-1} integrali di V, coi punti di uno spazio S, a $p-1$ dimensioni, e s' indichino colle stesse lettere A_1, A_2 gli spazî a q_1-1 ed a q_2-1 dimensioni, imagini dei sistemi A_1, A_2, il sistema intersezione H ed il sistema congiungente K, verranno rappresentati rispettivamente dallo spazio intersezione H e dallo spazio congiungente K di A_1, A_2.

Sicchè le dimensioni $r-1$ ed $s-1$ di H, K saranno legate alle dimensioni di A_1, A_2 dalla relazione

$$r+s=q_1+q_2,$$

e, se non esiste H, il sistema K avrà la dimensione q_1+q_2-1.

Consideriamo anzitutto il caso in cui H manchi. Allora scrivendo i periodi di una combinazione lineare generica degl' integrali di A_1, A_2, cioè di un integrale generico di K, si vede subito che K è un sistema di q_1+q_2 integrali indipendenti con *al più* $2(q_1+q_2)$ periodi ridotti. Diciamo « al più », perchè *a priori* potrebbe dubitarsi che questi periodi fossero ulteriormente riducibili.

Ma se si ricorda che il doppio del numero degl' integrali indipendenti (di 1ª specie) contenuti in un dato sistema lineare d' integrali riducibili, non può mai superare il numero dei periodi ridotti [2], si conclude che i pe-

[1] Che le W' sieno *algebriche* risulta da un teorema di Picard, contenuto nel lavoro citato. Viceversa Castelnuovo ha dimostrato che, se q_1 integrali semplici di 1ª specie di V si mantengono costanti lungo una curva o superficie o varietà algebrica, essi individuano un sistema regolare ∞^{q_1-1}. Ved. Nota citata, pag. 594.

[2] *Lezioni*, pag. 338.

riodi ridotti, ulteriormente irriducibili, degl' integrali di K, son proprio in numero di $2(q_1+q_2)$, e quindi che K è regolare.

Prima di passare ad esaminare il caso in cui H esista, convien premettere la nozione di *sistema complementare* (regolare) di un dato sistema regolare.

Picard [1] e Poincaré [2] hanno dimostrato che, se una varietà con p integrali semplici di 1ª specie, possiede q_1 integrali semplici di 1ª specie riducibili, a $2q_1$ periodi ridotti, essa possiede in conseguenza un sistema di $p-q_1$ integrali di 1ª specie con $2(p-q_1)$ periodi ridotti.

E di più i due sistemi (regolari) non hanno alcun integrale comune, sicchè sono rappresentati in S da due spazî duali, indipendenti. Due sistemi siffatti si chiameranno *complementari* l'uno dell'altro. Non è però detto che un sistema regolare individui il suo complementare (n. 4 Oss.); comunque ciò non pregiudica affatto le nostre ulteriori considerazioni.

Un sistema regolare M, di dimensione $d-1$, il quale sia contenuto in un altro sistema regolare N, di dimensione $l-1$ $(l>d)$, *ammette anche entro N un sistema complementare*, di dimensione $l-d-1$, cioè un sistema regolare ∞^{l-d-1}, non avente con M alcun integrale comune. Esso non è altro che l' intersezione di N col complementare di M, entro al sistema totale S.

Ciò premesso, si esaurisce subito anche il caso in cui esista il sistema intersezione H dei due dati sistemi regolari A_1, A_2. Costruiscasi in A_1 un sistema B_1, di dimensione q_1-r-1, complementare di H: B_1 è indipendente da H e quindi anche da A_2. Ed è chiaro che il sistema K, congiungente A_1 ed A_2, coincide con quello che congiunge B_1 ed A_2. Dall'esame del caso precedente, segue pertanto che K è esso stesso un sistema regolare. E si conclude:

Anche il sistema congiungente di due dati sistemi regolari d'integrali riducibili, è regolare.

2. Ampliamento di un sistema regolare. — Se la varietà picardiana V, di dimensione p, possiede un sistema regolare A, ∞^{q-1}, d'integrali riducibili, si può sempre costruire una picardiana W, di dimensione q, a cui *spettino* quegl' integrali, cioè tale che gl' integrali semplici di 1ª specie di W, abbiano gli stessi periodi degl' integrali appartenenti ad A. I punti di W sono le imagini delle ∞^q varietà tracciate su V, lungo cui sono costanti quegl' integrali ed il punto corrente su W è funzione razionale del punto corrente su V.

[1] Memoria cit. pag. 43. Ivi trovasi il teorema cui si allude nel testo per le curve di genere 2.

[2] *Sur les fonctions abéliennes* (cit.), pag. 302. Ved. pure, Castelnuovo, loc. cit., pag. 598.

Posto ciò, consideriamo un'altra picardiana W' di dimensione q' e sia Φ la picardiana, di dimensione $q+q'$, che rappresenta la varietà delle coppie di punti di W, W'. La Φ contiene due sistemi regolari complementari, rispettivamente di ∞^{q-1} e $\infty^{q'-1}$ integrali riducibili: i primi hanno gli stessi periodi ridotti degl' integrali di W, ossia di A, e i secondi gli stessi periodi ridotti degl' integrali di W'.

Si è così costruito un sistema regolare più ampio B, $\infty^{q+q'-1}$, cui appartiene un sistema regolare *identico* al dato sistema ∞^{q-1} A. E quando parliamo di sistemi « identici » d'integrali riducibili, intendiamo alludere a sistemi i cui elementi (integrali) si possono riferire (omograficamente) per guisa che due integrali corrispondenti abbiano gli stessi periodi ridotti. Due varietà di Picard, di dimensione q, a cui spettino rispettivamente due dati sistemi regolari ∞^{q-1}, fra loro identici, sono birazionalmente equivalenti.

Diremo per ciò che *il sistema regolare B è un ampliamento del sistema regolare A*, ottenuto per *proiezione* dal sistema lineare degl'integrali di W'.

3. Dimostrazione geometrica del teorema di Poincaré, relativo alle curve (o varietà) con infiniti integrali ellittici. — Dalle proposizioni del n. 1 discende che se, entro alla totalità S degli ∞^{p-1} integrali semplici di 1ª specie di una varietà algebrica V, esistono più sistemi regolari d'integrali riducibili, *ogni sistema lineare dedotto da essi con operazioni interne di proiezione e di sezione, è un sistema regolare d'integrali riducibili.*

Supponiamo che V possegga $\mu+1$ integrali ellittici $u_1, u_2, \dots, u_{\mu+1}$, linearmente dipendenti ($p \geq \mu \geq 2$). Senza introdurre un'effettiva restrizione, si può ritenere che fra i suddetti integrali non se ne trovino mai μ dipendenti fra loro.

Il sistema regolare congiungente quegl' integrali, ha perciò la dimensione $\mu-1$, e viene rappresentato da uno spazio lineare K, in cui sono segnati $\mu+1$ punti $u_1, u_2, \dots, u_{\mu+1}$, a μ a μ indipendenti, imagini dei dati integrali. A partire allora da quei $\mu+1$ punti, con operazioni interne di proiezione e di sezione, se ne possono ottenere infiniti altri (com'è ben noto, si ottengono così tutti e soli i punti « razionali » rispetto al gruppo dei $\mu+1$ dati, i quali si assumano come vertici della piramide fondamentale delle coordinate proiettive). Si conclude pertanto col teorema di Poincaré:

Se una varietà (o curva) algebrica con p integrali semplici di 1ª specie, contiene $\mu+1$ integrali ellittici linearmente dipendenti ($p \geq \mu \geq 2$) ne contiene infiniti altri.

Nel caso $\mu=3$, come già abbiamo detto nell'introduzione, gl' infiniti integrali ellittici vengono rappresentati dai vertici della rete di Möbius che, sul piano rappresentativo K, è definita dai punti, a 3 a 3 indipendenti, imagini dei 4 integrali ellittici dati. Le rette della rete corrispondono a sistemi regolari di 2 integrali riducibili con 4 periodi. Se a è una retta della rete, il corrispondente sistema ∞^1 contiene alla sua volta infiniti integrali ellittici, rappresentati dai vertici della rete che cadono su a. Tali vertici, come si sa, s'ottengono tutti da tre di essi, mediante successive costruzioni di quarti armonici.

Nel caso di μ qualunque, potremo similmente dire che gl' infiniti integrali ellittici vengono coordinati ai vertici di *una rete di Möbius di specie* $\mu - 1$, *avente come base un gruppo di* $\mu + 1$ *punti a* μ *a* μ *indipendenti*. Le rette, i piani,..., gli $S_{\mu-2}$ della rete, rappresentano rispettivamente sistemi regolari di 2 integrali con 4 periodi, di 3 integrali con 6 periodi,..., di $\mu - 1$ integrali con $2(\mu - 1)$ periodi; e su ognuno degli spazî subordinati della rete, il quale abbia la dimensione k ($k = 1, 2, \ldots, \mu - 2$), resta subordinata una rete di Möbius di specie k, i cui elementi rappresentano sistemi regolari d'integrali riducibili. In particolare sopra una retta della rete si hanno, come prima, infiniti punti imagini d'integrali ellittici, i quali s'ottengono tutti da 3 di essi, mediante costruzioni di quarti armonici. Una tal totalità di punti si chiamerà brevemente *una rete di Möbius di specie 1*, avente come base una terna di punti (allineati).

Osservazione. — La dimostrazione esposta cade in difetto nel caso estremo $\mu = 2$, perchè allora lo spazio K riducesi ad una retta, su cui sono segnati 3 punti distinti u_1, u_2, u_3. E da questi non se ne possono dedurre altri, con operazioni interne di proiezione e di sezione. Tuttavia proveremo che anche in tal caso la varietà V possiede infiniti integrali ellittici, rappresentati dai punti della rete di Möbius di specie 1, definita da (u_1, u_2, u_3).

A tale scopo si operi l'ampliamento del sistema K, mediante proiezione di questo sistema da un integrale ellittico u_4 identico ad u_3 (n. 2), talchè la varietà Φ del n. prec., verrà in tal caso ad esser la varietà delle terne dei punti tolti da tre curve ellittiche $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, alle quali spettino rispettivamente tre integrali identici ad u_1, u_2, u_3. Il sistema ampliato ∞^2, B, contiene un sistema (identico a) K e un altro sistema ∞^1, L, congiungente u_3 ed u_4. Ed è evidente che ad L appartengono infiniti integrali ellittici, ottenibili tutti combinando linearmente u_3, u_4, mediante coefficienti interi (o razionali).

Se pertanto sul piano B, imagine di B, si segnano le rette K, L (le quali si incontrano in u_3), uno, u_5, degl' infiniti punti di L (diversi da u_3, u_4), che rappresentano integrali ellittici, costituirà insieme ad u_1, u_2, u_4 una quaderna d'integrali ellittici, e tre a tre indipendenti. Saremo perciò ricondotti al caso $\mu = 3$, e si concluderà che la retta K, appartenente alla rete definita da (u_1, u_2, u_4, u_5), contiene infiniti vertici della rete stessa, formanti una rete di Möbius di specie 1; il che dimostra appunto quanto abbiamo asserito.