ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Sull'operatore differenziale binario* S *di M. Pieri.* Nota di MATTEO BOTTASSO, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sui moti turbolenti provocati da solidi immersi.* Nota di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Mostra l'esperienza che il movimento di un liquido, scorrente entro un tubo, può aver luogo in condizioni di regime, alquanto differenti fra loro: *il regime di Poiseuille* e *il regime idraulico*.

Se il liquido scorre molto lentamente in un tubo rettilineo, i filetti liquidi si mantengono sensibilmente paralleli alle pareti, senza mescolarsi gli uni cogli altri. È il *regime di Poiseuille*. Esso può caratterizzarsi analiticamente sfruttando le equazioni idrodinamiche di Navier per i liquidi viscosi, ridotte ai soli termini lineari, nelle componenti della velocità e loro derivate. Il regime di Poiseuille è stabile fino a che la velocità del liquido non passa un certo limite (*velocità critica*), di là del quale, esso è ancora possibile, ma cessa di essere stabile.

Considerazioni di omogeneità ad esperienze sistematiche hanno condotto Reynolds a ritenere che la velocità critica sia inversamente proporzionale al diametro del tubo e alla densità del liquido, e direttamente proporzionale al coefficiente di viscosità. In modo preciso, detti: ϱ la densità del liquido, k il coefficiente di viscosità, d il diametro di una sezione trasversale del tubo, V la velocità media nella sezione stessa, la instabilità del regime di Poiseuille incomincia a manifestarsi quando il rapporto (*rapporto di Reynolds*)

$$\frac{\varrho d \mathrm{V}}{\mathrm{k}}$$

assume un certo valore, che esperienze di Hagen, Couette e Reynolds stesso hanno concordemente stabilito eguale a circa 2000 in unità (C. G. S.). Detta V_c la velocità critica, si ha dunque sensibilmente

$$\mathrm{V}_c = 2000\,\frac{\mathrm{k}}{\varrho d}\,.$$

A partire da questa velocità, l'andamento regolare dei filetti — caratteristico del regime di Poiseuille — si modifica alquanto; questi tendono a confondersi insieme e a diffondersi in tutta la massa liquida effluente nel tubo, per dar luogo infine al *regime idraulico*. Questo nuovo regime non si stabilisce immediatamente dopo V_c, ma a partire da una velocità superiore, cioè di circa $1,2\,V_c$. Per velocità comprese in questo intervallo, sono *a priori* possibili entrambi i regimi; ma sono entrambi instabili.

Trattandosi di moti *non più lenti*, per lo studio analitico del fenomeno più non è sufficiente di ricorrere alle equazioni di Navier, ridotte ai soli termini lineari.

È questa la principale circostanza per cui lo studio teorico dei moti turbolenti è appena abbozzato (¹), e si è ancora in attesa di una soddisfacente giustificazione idromeccanica delle risultanze sperimentali.

Ciò premesso, veniamo alla questione che forma oggetto della presente Nota.

2. Si consideri un solido sferico, immerso in un liquido viscoso indefinitamente esteso. La sfera sia dotata di un moto rettilineo con velocità V; il suo moto si comunica alla massa fluida circostante.

Con qual legge?

Quando si tratta di una lenta traslazione del solido, a questa domanda risponde esaurientemente la classica soluzione di Stokes pel caso permanente, e una altrettanto esauriente soluzione nel caso, più generale, di una traslazione con velocità variabile (²).

L'elemento dinamico saliente che caratterizza, si può dire, il *regime di Stokes* è la resistenza opposta alla sfera dalla massa liquida, e il cui valore assoluto è — com'è ben noto — definito dalla formula

$$R = 6\pi a k V \qquad (a = \text{raggio della sfera}).$$

Per la trattazione analitica, ancor qui (come già per l'efflusso lento entro tubi), trattandosi di moti lenti, si è autorizzati ad usufruire delle equazioni di Navier, ridotte alla forma lineare.

Che cosa accade quando non si è più nel regime di Stokes? Quando cioè la velocità della sfera più non è lenta?

Dal punto di vista matematico, il problema esigerebbe l'integrazione delle equazioni di Navier, rigorose e non più approssimate. Ci si imbatte

(¹) Cfr. Sommerfeld, *Ein Beitrag zur Hydrodynamischen Erklaerung des Turbolenten Fluessigkeitsbewegungen*. Atti del IV congresso internazionale dei matematici, Roma, 1908, vol. III; Th. v. Karman und H. Rubach, *Ueber den Mechanismus des Flüssigkeits-und Lufwiderstandes*, Physikalische Zeitscrift, 1912; Mises, *Kleine Schwingungen und Turbulenz*, Jahresbericht d. Deutschen Mathem. Vereinigung, B. XXI (1912); Föppl, *Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder*, Münch. Sitzungberichte, 1913.

(²) Cfr. Picciati, *Sul moto di una sfera in un liquido viscoso*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVI (1907).

quindi nella stessa difficoltà accennata più sopra per lo studio dell'efflusso, non più lento, entro tubi [1].

Dal punto di vista fisico l'intuizione ci dice che deve accadere qualche cosa di analogo a ciò che si verifica per i liquidi scorrenti entro tubi. Ancor qui deve esistere oltre al regime tranquillo (di Stokes), un regime idraulico, e una *velocità critica* della sfera che segna il termine della stabilità di un regime e l'inizio della preparazione ad un nuovo regime.

Scopo della presente Nota è di mostrare, con considerazioni elementari suggerite dai criterî di omogeneità, che queste previsioni trovano una giustificazione teorica.

Tali considerazioni farebbero anzi prevedere la possibilità dell'esistenza di un terzo regime. In modo preciso, i tre regimi sarebbero caratterizzati dal diverso comportamento della resistenza, quale risulta dalle formule seguenti:

$$R_1 = \varphi a k V ,$$
$$R_2 = \psi \varrho a^2 V^2 ,$$
$$R_3 = \chi \frac{k^2}{\varrho} ,$$

dove φ, ψ, χ dipendono unicamente dal rapporto di Reynolds:

$$\sigma = \frac{\varrho a V}{k} .$$

Il primo regime corrisponde ad una resistenza proporzionale alla velocità, al raggio della sfera ed al coefficiente di viscosità: è il *regime di Stokes*.

Nel secondo regime — *regime idraulico* — la resistenza varia in proporzione al quadrato della velocità e alla superficie del solido.

Nel terzo regime la resistenza risulta proporzionale al quadrato del coefficiente di viscosità.

Il presentarsi dell'uno o dell'altro di questi regimi, quasi certamente dipende ancor qui — come già nell'efflusso entro tubi — dal valore del rapporto σ di Reynolds.

Il terzo regime (che analoghe considerazioni di omogeneità mettono in luce anche per i liquidi scorrenti entro tubi) non è stato messo in evidenza nelle esperienze di Reynolds. Non è però improbabile che il suo posto spetti a quell'intervallo V_c, $1.2\,V_c$ in cui è stata constatata l'instabilità dei due primi regimi.

(1) Per tentativi di soluzioni approssimate, a partire da quelli di Stokes, cfr. Noether, *Ueber den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel*. Zeitschrift für Math. und Physik, vol. 62 (1913); Oseen, *Ueber den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel*. Ark. f. Mat. Astr. och. Fysik 9, n. 16, (1913).

Agli esperimentatori spetta di assodare fino a qual punto le previsioni teoriche trovino conferma nella realtà.]

3. Il valore assoluto R della resistenza opposta dalla massa liquida alla traslazione della sfera, sarà, in generale, dipendente dalla densità ϱ e dalla viscosità k del liquido, nonchè dal raggio a e dalla velocità V della sfera. Ciò si può mettere in rilievo, scrivendo:

$$\mathrm{R} = f(\varrho\,, k\,, a\,, \mathrm{V})\,, \tag{1}$$

f designando la incognita legge di dipendenza.

Se si tengono presenti le dimensioni delle cinque quantità fisiche che entrano nella (1), e che, per comodo del lettore, mettiamo in evidenza mediante le rispettive equazioni maxwelliane di dimensioni:

$$[\mathrm{R}] = l\,t^{-2}m\;;\;[\varrho] = l^{-3}m\;;\;[k] = l^{-1}\,t^{-1}m\;;\;[a] = l\;;\;[\mathrm{V}] = l\,t^{-1}$$
$$(l = \text{lunghezze};\; t = \text{tempi};\; m = \text{masse}),$$

si ottiene da (1), dividendo le lunghezze per λ, i tempi per τ e le masse per μ,

$$\mathrm{R} = f(\lambda^3\mu^{-1}\varrho\,, \lambda\tau\mu^{-1}k\,, \lambda^{-1}a\,, \lambda^{-1}\tau\mathrm{V})\,.\,\lambda\tau^{-2}\mu\,. \tag{2}$$

Come si vede, la f dipende dai quattro argomenti

$$\lambda^3\mu^{-1}\varrho\;;\;\lambda\tau\mu^{-1}k\;;\;\lambda^{-1}a\;;\;\lambda^{-1}\tau\mathrm{V}\,,$$

che si possono rendere puri numeri. Per ciò è necessario e basta che $\lambda\,, \tau\,, \mu$ vengano fissati in modo che tre degli argomenti anzidetti sieno puri numeri, i quali, senza togliere nulla alla generalità, possiamo assumere $= 1$. Questo si può raggiungere in quattro modi distinti. Si richiede cioè che λ, τ, μ soddisfino ad uno dei quattro sistemi di equazioni seguenti:

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & \lambda\tau\mu^{-1}k = \lambda^{-1}a = \lambda^{-1}\tau\mathrm{V} = 1\,;\\
(\mathrm{II}) & \lambda^{-1}a = \lambda^{-1}\tau\mathrm{V} = \lambda^3\mu^{-1}\varrho = 1\,;\\
(\mathrm{III}) & \lambda^{-1}\tau\mathrm{V} = \lambda^3\mu^{-1}\varrho = \lambda\tau\mu^{-1}k = 1\,;\\
(\mathrm{IV}) & \lambda^3\mu^{-1}\varrho = \lambda\tau\mu^{-1}k = \lambda^{-1}a = 1
\end{array}$$

Queste dànno, rispettivamente, per soluzioni:

$$\begin{array}{llll}
(\mathrm{I}_1) & \lambda = a & ,\ \tau = a\mathrm{V}^{-1} & ,\ \mu = a^2\mathrm{V}^{-1}k\;;\\
(\mathrm{II}_1) & \lambda = a & ,\ \tau = a\mathrm{V}^{-1} & ,\ \mu = a^3\varrho\;;\\
(\mathrm{III}_1) & \lambda = \varrho^{-1}k\mathrm{V}^{-1} & ,\ \tau = \varrho^{-1}k\mathrm{V}^{-2} & ,\ \mu = \varrho^{-2}k^3\mathrm{V}^{-3}\;;\\
(\mathrm{IV}_1) & \lambda = a & ,\ \tau = a^2\varrho k^{-1} & ,\ \mu = a^3\varrho\,.
\end{array}$$

Per queste, la (2) diviene rispettivamente:

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
R_1 &= f_1\, ak\mathrm{V}\ ,\\
R_2 &= f_2\, \varrho a^2 \mathrm{V}^2\ ,\\
R_3 &= f_3\, \frac{k^2}{\varrho}\ ,\\
R_4 &= f_4\, \frac{k^2}{\varrho}\ ,
\end{aligned}\right.
$$

avendo posto per brevità:

$$f_1 = f\left(\frac{\varrho a \mathrm{V}}{k}\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\right),$$

$$f_2 = f\left(1\ ,\ \frac{k}{\varrho a \mathrm{V}}\ ,\ 1\ ,\ 1\right),$$

$$f_3 = f\left(1\ ,\ 1\ ,\ \frac{\varrho a \mathrm{V}}{k}\ ,\ 1\right),$$

$$f_4 = f\left(1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ \frac{\varrho a \mathrm{V}}{k}\right).$$

Come si vede, i quattro coefficienti, puramente numerici, f_1, f_2, f_3, f_4, dipendono unicamente dal rapporto di Reynolds

$$\sigma = \frac{\varrho a \mathrm{V}}{k}\ .$$

Matematica. — *Sur le moyen mouvement asymptotique et les solutions périodiques de certaines équations différentielles.* Nota di Emile Cotton, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Dans un fort intéressant Mémoire « *Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du noeud lunaire* » (Annales de l'École normale, 3ᵉ série, tom. 28, 1911) M. T. Levi-Civita a posé la question de l'existence de ce qu'il appelle un *moyen mouvement asymptotique* pour les solutions de l'équation différentielle

$$(1)\qquad \frac{d\theta}{dt} = f(\theta\ ,\ t)$$

dont le second membre est une fonction régulière (au point de vue du théorème de Cauchy-Lipschitz) périodique par rapport à θ et par rapport à t: il s'agit de savoir si l'on peut trouver un nombre μ tel que toute solution $\theta = \varphi(t)$ de (1) puisse se mettre sous la forme $\varphi(t) = \mu t + \varepsilon(t)$, ε restant borné pour toutes les valeurs de t.