ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Per queste, la (2) diviene rispettivamente:

$$(3)\qquad \begin{cases} R_1 = f_1\, akV\ , \\ R_2 = f_2\, \varrho a^2 V^2\ , \\ R_3 = f_3\, \dfrac{k^2}{\varrho}\ , \\ R_4 = f_4\, \dfrac{k^2}{\varrho}\ , \end{cases}$$

avendo posto per brevità:

$$f_1 = f\left(\frac{\varrho aV}{k}\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\right),$$

$$f_2 = f\left(1\ ,\ \frac{k}{\varrho aV}\ ,\ 1\ ,\ 1\right),$$

$$f_3 = f\left(1\ ,\ 1\ ,\ \frac{\varrho aV}{k}\ ,\ 1\right),$$

$$f_4 = f\left(1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ \frac{\varrho aV}{k}\right).$$

Come si vede, i quattro coefficienti, puramente numerici, f_1, f_2, f_3, f_4, dipendono unicamente dal rapporto di Reynolds

$$\sigma = \frac{\varrho aV}{k}\ .$$

Matematica. — *Sur le moyen mouvement asymptotique et les solutions périodiques de certaines équations différentielles.* Nota di Émile Cotton, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Dans un fort intéressant Mémoire « *Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du noeud lunaire* » (Annales de l'École normale, 3ᵉ série, tom. 28, 1911) M. T. Levi-Civita a posé la question de l'existence de ce qu'il appelle un *moyen mouvement asymptotique* pour les solutions de l'équation différentielle

$$(1)\qquad \frac{d\theta}{dt} = f(\theta\ ,\ t)$$

dont le second membre est une fonction régulière (au point de vue du théorème de Cauchy-Lipschitz) périodique par rapport à θ et par rapport à t: il s'agit de savoir si l'on peut trouver un nombre μ tel que toute solution $\theta = \varphi(t)$ de (1) puisse se mettre sous la forme $\varphi(t) = \mu t + \varepsilon(t)$, ε restant borné pour toutes les valeurs de t.

La réponse est affirmative: M. Levi-Civita l'a démontré dans un cas particulier (Mémoire cité, chap. 2) et M. E. E. Levi dans le cas général (Comptes-Rendus, 1911, tom. 153, pag. 799).

La même question, sous une forme bien différente, avait été résolue par H. Poincaré, dans le chapître XV de son célèbre Mémoire « *Sur les courbes définies par les équations différentielles* » (Journal de mathématiques, 4ème sér. tom. I., 1885, p. 220).

De plus, l'illustre géomètre a mis en évidence les relations entre les solutions périodiques de (1) et le nombre μ, et a proposé l'étude de ce nombre considéré comme fonction des coefficients de l'équation (1).

La présente Note se rapporte à ces derniers problèmes; son principal objet est une représentation géométrique mettant en évidence l'intérêt du nombre μ pour l'étude de la distribution des diverses solutions périodiques d'une équation

$$\frac{d\theta}{dt} = F(\theta, t, \lambda), \tag{2}$$

de même nature que (1), mais dont les coefficients dépendent d'un paramètre variable λ.

1. — Revenons d'abord à l'équation (1), dont nous supposons le second nombre entièrement déterminé. On peut admettre que les périodes de $f(\theta, t)$ par rapport à θ et par rapport à t sont égales à 2π.

Nous représentons géométriquement les solutions de (1) par des caractéristiques tracées dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ot, $O\theta$. Ces caractéristiques s'échangent entre elles par les transformations du groupe discontinu G constitué par les translations amenant l'origine O aux points dont les deux coordonnées sont des multiples de 2π.

La caractéristique passant par le point A_0 (O, α) de l'axe $O\theta$ rencontre la droite $t = 2n\pi$ en un point A_n; le coefficient angulaire $m_n(\alpha)$ de la droite $A_0 A_n$, joue dans la suite un rôle important.

La démonstration, donnée par H. Poincaré, de l'existence du moyen mouvement asymptotique μ montre que $m_n(\alpha)$ et μ ont même valeur approchée à $\frac{1}{n}$ près par défaut.

Si μ est un nombre rationnel $\frac{r}{s}$, il existe des solutions telles qu'on ait: $\varphi(t) + 2r\pi = \varphi(t + 2s\pi)$.

Ces solutions sont donc des *solutions périodiques*, le mot étant entendu au sens large que lui a donné H. Poincaré (*Méthodes nouvelles*, tom. I, p. 80); parmi les caractéristiques correspondantes, il en est qui admettent les transformations d'un sous-groupe de G. Toutes les solutions peuvent être périodiques; s'il en est de non périodiques, elles sont asymptotes à une solution pério-

dique. Avec la représentation des caractéristiques sur un tore dont H. Poincaré fait usage, il correspond un cycle à une solution périodique, et un cycle limite à une solution périodique isolée. Réciproquement si (1) admet une solution périodique, μ est rationnel.

2. — Considérons maintenant l'équation (2), dont les coefficients dépendent du paramètre λ. Nous supposerons que si λ varie dans un intervalle, d'où nous ne le ferons pas sortir, cette équation jouit des mêmes propriétés que l'équation (1). Nous admettrons même que $F(\theta, t, \lambda)$ est une *fonction analytique*.

La caractéristique issue du point $A_0(O, \alpha)$ coupe la droite $t = 2n\pi$ (n entier) en un point appelé plus haut, A_n, qui varie maintenant avec λ; désignons donc par $m_n(\alpha, \lambda)$ le coefficient angulaire de la droite $A_0 A_n$. *Nous représenterons la variation de* $m_n(\alpha, \lambda)$ *par une surface* S_n dont l'équation, rapportée à trois axes rectangulaires $O\alpha$, $O\lambda$, Oz, sera $z = m_n(\alpha, \lambda)$.

Cette surface se transforme en elle même par la translation parallèle à $O\alpha$ d'amplitude 2π. C'est d'ailleurs une surface analytique, ainsi que le montre un théorème de Poincaré (*Méthodes nouvelles*, tom. 1, pag. 58). Si le plan $z = \frac{p}{n}$ (p étant entier) coupe la surface S_n suivant une ligne réelle C_{pn}, cette courbe est une ligne analytique. À chacun de ses points correspond un système de valeurs de α et de λ, une équation (2) et une caractéristique bien déterminées; cette caractéristique admet l'une des transformations de G : elle correspond donc à une solution périodique pour laquelle le moyen mouvement asymptotique $\mu = \frac{p}{n}$.

D'ailleurs, lorsque $p = 0$, la courbe C_{pn} en question est identique à celles considérées par Poincaré dans la recherche des solutions périodiques (au sens restreint du mot) de l'équation (2).

En même temps que la surface S_n, nous considérerons la surface Σ définie par $z = \mu(\lambda)$, qui représente la variation du moyen mouvement asymptotique en fonction de λ et de α. Comme il ne dépend pas de α, cette surface est cylindrique, les génératrices sont parallèles à $O\alpha$.

La distance des deux points de rencontre de S_n et de Σ avec une même parallèle à Oz est inférieure à $\frac{1}{n}$; la surface analytique S_n tend donc uniformément vers Σ lorsque $\frac{1}{n}$ tend vers zéro; $\mu(\lambda)$ est donc une fonction continue, comme Poincaré l'avait annoncé; mais n'est pas nécessairement analytique.

Ainsi, pour l'équation

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 + \lambda \cos \theta,$$

qui s'intègre immédiatement, $\mu(\lambda)$ est égal à $\sqrt{1-\lambda^2}$ pour $|\lambda| < 1$; il est nul pour $|\lambda| > 1$: La section droite de la surface cylindrique se compose d'un demi-cercle et des deux prolongements du diamètre qui le limite.

Toute ligne C_{pn} est située sur Σ; si elle n'est pas formée de parallèles à l'axe $O\alpha$, il lui correspond une ou plusieurs bandes B_{pn} du plan $z = \frac{p}{n}$ limitées par des parallèles à cet axe et faisant partie de Σ. Réciproquement, à une telle bande, située sur un plan $z = \frac{p}{n}$ de cote rationnelle, il correspond nécessairement une courbe C_{pn} et une famille de solutions périodiques. Il peut arriver que C_{pn} soit composée de parallèles à l'axe $O\alpha$; il n'y a plus lieu de parler de bandes B_{pn}, leur largeur étant alors nulle.

L'existence de lignes C_{pn} ainsi constituées, qui paraît si vraisemblable au premier abord, est-elle une conséquence nécessaire de ce qui précède? je ne saurais le dire. Mais, par contre, il est bien évident qu'il existe des bandes B_{pn} aussi étroites qu'on le veut (c'est à dire que la différence des valeurs extrêmes de λ correspondant à la bande, est arbitrairement petite). On écarte, bien entendu, le cas où le moyen mouvement asymptotique resterait constant dans l'intervalle de variation de λ.

Les valeurs μ_0 et μ_1 de $\mu(\lambda)$ pour $\lambda = \lambda_0$ et $\lambda = \lambda_1$, étant supposées différentes, soit, pour fixer les idées, $\mu_0 < \mu_1$.

La surface analytique S_n coupe les plans $\lambda = \lambda_0$ et $\lambda = \lambda_1$ suivant des courbes Γ et Γ_1. Pour tous les points de Γ_0 on a $z < \mu_0 + \frac{1}{n}$ et, pour ceux de Γ_1, $z > \mu_1 - \frac{1}{n}$; et si n est assez grand, il existe un entier p tel que $\mu_0 - \frac{1}{n} < \frac{p}{n} < \mu_1 + \frac{1}{n}$.

Coupons alors S_n par un plan $\alpha =$ constante: l'intersection coupe le plan $z = \frac{p}{n}$. Il existe alors des solutions périodiques pour lesquelles les nombres r et s du n° 1 sont égaux à p et à n, et pour lesquelles la valeur initiale de θ a une valeur arbitrairement donnée à l'avance.

Il suffit de connaître (d'une façon exacte ou suffisamment approchée) une solution de chacune des équations particulières obtenues en remplaçant dans (2) λ *par* λ_0 *et par* λ_1, *pour pouvoir s'assurer que les valeurs correspondantes,* μ_0 *et* μ_1, *du moyen mouvement asymptotique* μ, *sont différentes.*

S'il en est ainsi, on pourra, en résumé, affirmer l'existence d'une infinité de familles à un paramètre de solutions périodiques, pour l'équation générale (2). *Parmi celles-ci il en est qui diffèrent aussi peu qu'on le veut de familles où toutes les solutions sont périodiques, quelles que soient les valeurs initiales de ces solutions.*