ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Meccanica. — *Sopra una espressiva interpretazione cinematica del principio di relatività.* Nota della sign.na CLARICE MUNARI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Caratterizzazione energetica dei moti soggetti a resistenza viscosa od idraulica.* Nota I di A. SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sia P un punto materiale libero. I suoi movimenti sotto l'azione di una forza perpendicolare alla velocità, in un mezzo che loro opponga una resistenza viscosa (idraulica), sono caratterizzati dal fatto che, in un intervallo di tempo non nullo qualunque, la perdita unitaria di forza viva (1) è positiva e dipende solamente dalla durata dell'intervallo (dal cammino percorso da P).

Questa è l'osservazione che, convenientemente generalizzata prendendo in esame il movimento di un qualunque sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo, forma il soggetto della Nota presente e di un'altra che le farà immediatamente seguito.

1. Sia S un sistema olonomo con n gradi di libertà a vincoli indipendenti dal tempo e privi di attrito. Indicando con $\mathfrak{T}$ la forza viva, con $q_1, q_2, \dots, q_n$ le coordinate lagrangiane, le equazioni del moto saranno

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_h} = Q_h, \qquad (h = 1, 2, \dots n)$$

ove si rappresenti con Q_h la forza secondo la coordinata lagrangiana q_h (che in generale sarà funzione di t, delle q e delle $\dot{q}$).

Di più, poichè si suppongono i vincoli indipendenti dal tempo, $\mathfrak{T}$ risulterà una forma quadratica delle $\dot{q}$ (definita e positiva)

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\,\dot{q}_r\,\dot{q}_s$$

(1) Naturalmente, per perdita unitaria di forza viva relativa ad un intervallo di tempo, intendo il quoziente tra la differenza dei valori iniziale e finale della forza viva, e il valore iniziale della forza viva stessa.

a coefficienti dipendenti dalle sole q, e varrà l'equazione della forza viva

(1) $$\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = \sum_1^n{}_h\, Q_h\, \dot{q}_h\,,$$

che dà, come conseguenza immediata,

$$\frac{d \log \mathfrak{T}}{dt} = \frac{\sum_1^n{}_h\, Q_h\, \dot{q}_h}{\mathfrak{T}}\,.$$

Se ne deduce, posto

$$P_{t,\tau} = \frac{\mathfrak{T}_t - \mathfrak{T}_{t+\tau}}{\mathfrak{T}_t}\,,$$

detta cioè $P_{t,\tau}$ la perdita unitaria di forza viva nell'intervallo di tempo $(t, t+\tau)$:

(2) $$P_{t,\tau} = 1 - e^{\int_t^{t+\tau} \frac{\sum_1^n{}_h\, Q_h\, \dot{q}_h}{\mathfrak{T}}\, dt}\,.$$

2. Per esporre nel modo più semplice ed espressivo l'osservazione da cui deriva la presente Nota, ci sarà conveniente di contrassegnare con opportune denominazioni due speciali tipi di dipendenza (delle Q dalle $\dot{q}$, cioè) delle forze attive su S dall'atto di movimento.

Diremo che il sistema delle forze attive su S:

1°) *è perpendicolare all'atto di movimento* quando, qualunque siano t, le q e le $\dot{q}$, si ha

(3) $$\sum_1^n{}_h\, Q_h\, \dot{q}_h = 0\,;$$

2°) *deriva da una resistenza di mezzo* quando sia

(4) $$Q_h = -f(\mathfrak{T})\,\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h}\,, \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

ove $f(\mathfrak{T})$ è una funzione della forza viva di S sempre positiva per $\mathfrak{T} > 0$. In questo secondo caso chiameremo $f(\mathfrak{T})$ la funzione caratteristica della resistenza di mezzo.

Ambedue le denominazioni introdotte si presentano come naturali estensioni di denominazioni di uso corrente quando si pensi alla rappresentazione del moto di S mediante il moto di un punto P (di coordinate $q_1, q_2, \ldots, q_n$) in un S_n, a fondamento della cui metrica sia posta la forma differenziale quadratica (definita e positiva)

$$ds^2 = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dq_r\, dq_s\,.$$

Per la prima denominazione la cosa appare senz'altro evidente: rispetto poi alla seconda, è forse il caso di rilevare esplicitamente che, quando si richieda che le Q risultino proporzionali alle $\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}}$, i valori forniti per esse dalle (4) sono i più generali cui corrisponda in qualunque atto di movimento del sistema una potenza essenzialmente negativa, e di grandezza dipendente solo dalla grandezza della forza viva di S.

3. Ciò premesso, supponiamo che il sistema delle forze attive su S risulti di un sistema di forze perpendicolari all'atto di movimento e di un sistema di forze dovuto ad una resistenza di mezzo: cioè sia

$$Q_h = Q_h^\star - f(\mathfrak{T}) \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h}, \qquad (h = 1, 2, \dots n)$$

ove le $Q_h^\star$, qualunque siano t, le q e le $\dot{q}$, soddisfino la relazione

$$\sum_1^n {}_h\, Q_h^\star \dot{q}_h = 0.$$

Posto

$$I_{t,\tau} = \int_t^{t+\tau} f(\mathfrak{T})\, dt,$$

avremo allora, per la (2),

$$P_{t,\tau} = 1 - e^{-I_{t,\tau}}, \tag{5}$$

cioè $P_{t,\tau}$ risulterà una funzione di $I_{t,\tau}$ soltanto, positiva per $I_{t,\tau} > 0$ (¹):

Supponiamo, viceversa, che nel moto di S, $P_{t,\tau}$ risulti una funzione di $I_{t,\tau}$ soltanto, positiva per $I_{t,\tau} > 0$:

$$P_{t,\tau} = \mathfrak{F}(I_{t,\tau}).$$

In questa ipotesi, derivando rispetto a τ, otteniamo, qualunque sia τ;

$$\frac{d}{dt} P_{t,\tau} = -\frac{1}{\mathfrak{T}_t} \frac{d}{dt} \mathfrak{T}_{t+\tau} = \mathfrak{F}'(I_{t+\tau})\, f(\mathfrak{T}_{t+\tau});$$

(¹) Sulla traccia del procedimento seguito nella Nota del Levi-Civita: *Sul moto di un sistema di punti materiali soggetti a resistenze proporzionali alle rispettive velocità* (Atti del R. Istituto Veneto, serie VII, tomo VII), sarebbe facile di convincersi che la (5) è una diretta conseguenza del fatto che le equazioni del moto di S, in assenza del sistema di forze perpendicolare all'atto di movimento, si possono ricavare dalle equazioni del moto libero dello stesso S, mediante il cambiamento di variabile indipendente

$$dt_1 = e^{-\int f(\mathfrak{T})\, dt}\, dt,$$

ove t_1 rappresenti il tempo pel moto libero, e t il tempo pel moto soggetto al sistema di forze derivante dalla resistenza di mezzo di funzione caratteristica $f(\mathfrak{T})$.

e in particolare per $\tau = 0$ (scrivendo per semplicità, secondo il solito, $\mathfrak{T}$ al posto di $\mathfrak{T}_t$),

$$\frac{1}{\mathfrak{T}} \frac{d\mathfrak{T}}{dt} = -kf(\mathfrak{T}), \tag{6}$$

ove si rappresenti con k il valore, necessariamente positivo [1], di $\mathfrak{F}'(0)$.

Confrontando la (6) colla (1) si ottiene

$$\sum_1^n {}_h \, Q_h \, \dot{q}_h = -kf(\mathfrak{T})\, \mathfrak{T}\,.$$

Se allora poniamo

$$Q_h = Q_h^\star - kf(\mathfrak{T}) \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h}\,, \qquad (h, 1, 2, \ldots n)$$

subito troviamo che in qualunque atto di movimento del sistema, cioè qualunque siano t, le q e le $\dot{q}$, dovrà risultare

$$\sum_1^n {}_h \, Q_h^\star \, \dot{q}_h = 0\,.$$

Possiamo dunque concludere che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema delle forze attive su S *risulti di un sistema di forze perpendicolare all'atto di movimento, e di un sistema di forze dovuto ad una resistenza di mezzo, è che esista una funzione $f(\mathfrak{T})$ della forza viva del sistema, sempre positiva per $\mathfrak{T} > 0$ e tale che, posto*

$$I_{t,\tau} = \int_t^{t+\tau} f(\mathfrak{T})\, dt\,,$$

$P_{t,\tau}$ *risulti funzione di* $I_{t,\tau}$ *solamente, positiva per* $I_{t,\tau} > 0$. *In tale ipotesi, la $f(\mathfrak{T})$ coinciderà, a meno di una costante moltiplicativa, colla funzione caratteristica della resistenza di mezzo.*

[1] Essendo

$$\mathfrak{F}(0) = P_{t,0} = 0\,,$$

l'ipotesi che sia

$$\mathfrak{F}(I_{t,\tau}) > 0$$

per

$$I_{t,\tau} > 0$$

porta di conseguenza che $\mathfrak{F}'(0)$ non può risultare negativa. D'altra parte non può risultare nulla, perchè allora, per la (6), sarebbe $\mathfrak{T} = \text{cost}$, e, in conseguenza, $P_{t,\tau} = 0$, qualunque fosse τ. Sarà dunque, necessariamente,

$$\mathfrak{F}'(0) > 0\,.$$