ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Sopra alcune applicazioni della teoria della chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali.* Nota del dott. LUCIO SILLA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le ultime ricerche del prof. Lauricella, intorno ai sistemi di funzioni ortogonali, all'equazione integrale di prima specie e alle funzioni permutabili del prof. Volterra, avendo dato luogo di recente a notevoli lavori [1], saranno, a nostro avviso, feconde di nuovi ed importanti risultati, sopratutto se taluno, interpretando il comune desiderio, ne agevolerà al più presto lo studio ripubblicandole in una Memoria riassuntiva che il compianto Autore non ebbe agio di fare.

Ci proponiamo, per ora, di mostrare che la teoria stabilita nella Nota *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali, ecc.* [2] permette, come il Lauricella stesso affermava nel proemio, di trovare utili applicazioni per gli sviluppi delle funzioni in serie di funzioni ortogonali e per la risoluzione dell'equazione integrale di prima specie a limiti costanti.

1. Sia

$$(\Phi) \qquad \varphi_1(x)\,,\,\varphi_2(x)\,,\,\ldots\,,\,\varphi_i(x)\,,\,\ldots$$

un sistema finito o infinito (numerabile) di funzioni ortogonali in un certo intervallo (ab); le $\varphi_1(x)\,,\,\varphi_2(x)\,,\ldots$ siano, cioè, sommabili (integrabili, nel senso del Lebesgue) insieme con i loro quadrati e con i loro prodotti due a due in quell'intervallo, e tali che si abbia:

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 \;\ldots\ldots\; i \neq j \\ 1 \;\ldots\ldots\; i = j\,. \end{cases}$$

Il sistema Φ è detto *chiuso* se le equazioni integrali:

$$(1) \qquad \int_a^b \theta(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0\,, \qquad (i = 1\,,2\,,3\,,\ldots)$$

non ammettono alcuna *soluzione effettiva* $\theta(x)$, cioè non sono eventualmente soddisfatte che da funzioni $\theta(x)$ diverse dallo zero tutto al più in un insieme

[1] Cfr., per esempio, le Note: del prof. E. Daniele, *Sui nuclei che si riproducono per iterazione* [Rendic. del Circolo mat. di Palermo, tom. XXXVII (1914), pp. 262-266]; e del prof. C. Severini, *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm* [Rendic. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, tom. XXIII (1914), pp. 219-225].

[2] Rendic. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, tom. XXI (1912), pp. 675-685.

di punti di misura nulla. Se, invece, esistono soluzioni effettive delle equazioni (1), il sistema Φ sarà detto *aperto* [1].

Nel caso di un sistema Φ aperto, il Lauricella ha dimostrato [2] che si può sempre, ed in un modo solo, costruire un sistema finito, o infinito e numerabile, di funzioni ortogonali:

$$(M) \qquad \mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_i(x), \ldots,$$

che egli ha chiamato *sistema complementare* di Φ, in guisa che il sistema totale che ne risulta:

$$\Omega = \Phi + M = \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \mu_1(x), \mu_2(x), \ldots$$

sia ortogonale e chiuso.

2. Gioverà ora richiamare un teorema che ha una speciale importanza per le questioni che interessano i sistemi di funzioni ortogonali e la soluzione dell'equazione integrale di prima specie a limiti costanti, e che si può denominare di *Fischer-Weyl* [3].

Sia proposta la successione:

$$(2) \qquad f_1(x), f_2(x), \ldots$$

di funzioni sommabili nell'intervallo (ab) insieme con i loro quadrati: diremo che quella successione è *convergente in media* se si ha:

$$\lim_{m,n \equiv \infty} \int_a^b \{f_m(x) - f_n(x)\}^2 \, dx = 0.$$

Diremo poi che la successione (2) *converge in media verso la funzione* $f(x)$, se è soddisfatta la condizione:

$$\lim_{s \equiv \infty} \int_a^b \{f(x) - f_s(x)\}^2 \, dx = 0.$$

Ciò premesso, il teorema di Fischer-Weyl si può enunciare così: Se la successione (2) è convergente in media, è sempre possibile (ed in infiniti modi diversi) estrarre dalla (2) una successione parziale:

$$(3) \qquad f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), f_{n_3}(x), \ldots,$$

(1) Per maggiore esattezza di terminologia, preferiamo adottare questa locuzione in luogo dell'altra *non chiuso*.

(2) Nella Nota precedentemente citata: *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali, ecc.*

(3) Cfr. E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne* (Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, tom. CXLIV, 1° sem., 1907, pp. 1022-1024); H. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten* (Math. Ann., tom. LXVII, 1909, pp. 225-245) e G. Lauricella, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie* (Rend. della R. Acc. dei Lincei. serie 5ª, tom. XX, 1911, pp. 528-536).

dove $n_1, n_2, n_3, \ldots$ sono numeri interi, positivi e crescenti, la quale converge *uniformemente in generale* [1] nell'intervallo (ab) verso un'unica funzione $f(x)$ determinata in tutto (ab) (eccetto, al più, i punti di un insieme di misura nulla) e sommabile col suo quadrato in quell'intervallo. Inoltre la successione (2) converge in media verso la funzione $f(x)$, e si può pure scrivere:

$$(4) \qquad f(x) = f_{n_1}(x) + [f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)] + [f_{n_3}(x) - f_{n_2}(x)] + \cdots$$

3. Teorema I: *se* $F(x)$, *come pure il suo quadrato e il suo prodotto per una qualunque delle funzioni* $\varphi(x)$ *del sistema* Φ, *sono funzioni sommabili nell'intervallo* (ab), *e se, inoltre,* Φ *è un sistema chiuso, è sempre possibile sviluppare* $F(x)$ *in una serie di funzioni* $\varphi(x)$ *che converge uniformemente in generale nell'intervallo* (ab), *secondo il teorema di Fischer-Weyl.*

Ci limiteremo soltanto ad indicare la dimostrazione di questo teorema, rinviando per i particolari ad una precedente Nota [2].

Siano:

$$a_i = \int_a^b F(x)\, \varphi_i(x)\, dx \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

i cosidetti *coefficienti di Fourier* della funzione $F(x)$ relativi alla successione Φ; posto:

$$(5) \qquad f_j(x) = \sum_1^j {}_i\, a_i\, \varphi_i(x), \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

si dimostra che la successione (5) è convergente in media; quindi, per il teorema di Fischer-Weyl, la successione convergerà in media verso una unica funzione $F_1(x)$ tale che, applicando la formola (4), si potrà scrivere:

$$F_1(x) = \sum_1^{n_1} {}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2} {}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \cdots,$$

dove, beninteso, la serie del secondo membro è uniformemente convergente in generale nell'intervallo (ab) considerato.

Ora, poichè:

$$\int_a^b F_1(x)\, \varphi_i(x)\, dx = a_i,$$

[1] È una locuzione del Weyl; s'intende che, indicata con ε una quantità positiva ad arbitrio, la successione (3) convergerà in egual grado in un intervallo C_ε (appartenente ad (ab) e la cui misura non è inferiore a b-a-ε) verso una funzione $f(x)$.

[2] Cfr. la nostra Nota: *Sulla propagazione del calore* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, tom. XXI, 1912, pp. 441-447).

sarà:

$$\int_a^b \{ F(x) - F_1(x) \} \varphi_i(x)\, dx = 0 ;$$

quindi $F(x) = F_1(x)$, essendo Φ un sistema ortogonale chiuso.

4. Teorema II. *Se* $F(x)$ *è una funzione che soddisfa alle condizioni enunciate nel precedente teorema e, dippiù, il suo prodotto per una qualunque delle funzioni* $\mu(x)$ *del sistema* M, *complementare del sistema* Φ, *è sommabile nell'intervallo* (ab); *se, inoltre,* Φ *è un sistema ortogonale aperto, la condizione necessaria e sufficiente affinchè* $F(x)$ *sia sviluppabile in serie di funzioni* $\varphi_i(x)$, *uniformemente convergente in generale nell'intervallo* (ab), *a norma del teorema di Fischer-Weyl, è che si abbiano:*

$$\int_a^b F(x)\, \mu_i(x)\, dx = 0 . \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

Dimostriamo che la condizione è necessaria. Supponiamo, pertanto, che si sia trovato:

$$F(x) = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \cdots \tag{7}$$

dove le a_i sono i coefficienti di Fourier di $F(x)$ rispetto alle funzioni $\varphi_i(x)$ del sistema Φ ed $n_1, n_2, \ldots$ indicano numeri interi, positivi e crescenti: la serie del secondo membro è, inoltre, supposta convergente uniformemente in generale nell'intervallo (ab). Moltiplicando ambi i membri della (7) per $\mu_j(x)$ e integrando per serie, fra i limiti a e b, si ha:

$$\int_a^b F(x)\, \mu_j(x)\, dx = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i \int_a^b \mu_j(x)\, \varphi_i(x)\, dx + \cdots = 0 , \quad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

giacchè si è tenuto conto che le funzioni $\varphi_i(x)$ e $\mu_j(x)$ costituiscono un unico sistema ortogonale (n. 1).

Dunque la condizione (6) è necessaria.

Ci rimane da provare che quella condizione è sufficiente, vale a dire che, supposto siano soddisfatte le (6), la $F(x)$ è suscettibile dello sviluppo (7). Costruiamo, a tal uopo, la successione seguente:

$$\varpi_1(x), \varpi_2(x), \ldots, \varpi_j(x) = \sum_1^{j}{}_i\, a_i\, \varphi_i(x), \ldots :$$

si dimostra, con un metodo già noto [1], che questa è convergente in media;

[1] Cfr. la nostra Nota già citata.

quindi, pel teorema di Fischer-Weyl, esisterà una funzione $G(x)$ verso la quale la successione convergerà in media, e tale che si avrà:

$$(8) \qquad G(x) = \sum_{1}^{n_1}{}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \cdots \text{ (1)}:$$

la serie del secondo membro converge, inoltre, uniformemente in generale nell'intervallo (ab).

Ora, integrando per serie, dalla (8), si ottiene:

$$\int_a^b G(x)\, \varphi_j(x)\, dx = a_j\,.$$

E, poichè si è posto:

$$\int_a^b F(x)\, \varphi_j(x)\, dx = a_j\,,$$

risulterà:

$$\int_a^b \{G(x) - F(x)\}\, \varphi_j(x)\, dx = 0.$$

D'altra parte, dalla (8), moltiplicando per $\mu_j(x)$ e integrando per serie fra a e b, abbiamo, a causa della ortogonalità del sistema $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{M}$

$$\int_a^b G(x)\, \mu_j(x)\, dx = 0\,.$$

Ma, per ipotesi, sussistono la (6); dunque avremo pure:

$$\int_a^b \{G(x) - F(x)\}\, \mu_j(x)\, dx = 0.$$

Ora, poichè $\boldsymbol{M}$ è il sistema complementare di $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{M}$ è un sistema chiuso e dobbiamo perciò concludere che $F(x) = G(x)$.

5. I risultati precedenti trovano utili applicazioni nell'equazione integrale di prima specie:

$$(9) \qquad g(x) = \int_a^b K(x\,, y)\, h(y)\, dy\,,$$

dove $g(x)$ è una funzione data, $K(x\,, y)$ è il *nucleo dell'equazione integrale*, pur esso noto, e $h(y)$ è la funzione incognita. Come è noto, per la teoria dello Schmidt (2), esiste una serie finita od infinita (numerabile) di coppie di funzioni ortogonali

$$\varphi_1(x)\,,\ \psi_1(y)\ ;\ \varphi_2(x)\,,\ \psi_2(y)\ ;\ldots$$

(1) S'intende che i numeri $n_1\,, n_2 \ldots$ non sono propriamente quelli della formola (7).

(2) E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen* (Math. Ann., tom. 63, 1907, pp. 433-476).

tali che:

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, \psi_i(y)\, dy \quad , \quad \psi_i(y) = \lambda_i \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, \varphi_i(x)\, dx ,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ costituiscono una successione di costanti positive che, se infinita, ha il solo punto limite $\lambda \equiv \infty$.

Ora se il nucleo $\mathrm{K}(x, y)$ è aperto rispetto alle x, se cioè il sistema Φ è aperto, talchè le equazioni integrali (1) ammettono soluzioni $\theta(x)$ effettive, per l'esistenza di una soluzione della (9) debbono essere soddisfatte due condizioni [1]: *a*) che la serie $\sum_1^\infty{}_i\, a_i^2 \lambda_i^2$ converga, essendo:

$$a_i = \int_a^b g(x)\, \varphi_i(x)\, dx ;$$

b) che $g(x)$ sia sviluppabile in serie di funzioni $\varphi_i(x)$ con i coefficienti a_i. Ebbene, in base al teorema II (n. 4) possiamo sostituire alla condizione (*b*) l'altra, in modo cioè che si abbia:

$$\int_a^b g(x)\, \mu_i(x)\, dx = 0 , \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

dove le $\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots$ costituiscono il sistema complementare di Φ.

6. Il Lauricella ha dimostrato [2] che, alla condizione (*b*) si può sostituire l'altra equivalente:

$$\int_a^b g(x)\, \theta(x)\, dx = 0 , \tag{11}$$

che deve essere soddisfatta da tutte le funzioni $\theta(x)$ che sono soluzioni delle (1). Ora è facile dimostrare che le condizioni (10) e (11) sono sostituibili l'una all'altra. Infatti, se sussistono le (10) possiamo scrivere (n. 4), che

$$g(x) = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \cdots ;$$

donde, moltiplicando per $\theta(x)$, e integrando per serie fra a e b, risulta:

$$\int_a^b g(x)\, \theta(x)\, dx = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i \int_a^b \theta(x)\, \varphi_i(x)\, dx + \cdots = 0 ,$$

giacchè $\theta(x)$ è, per ipotesi, una soluzione effettiva di (1).

[1] Cfr. G. Lauricella, *Sull'equazione integrale di 1ª specie* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, tom. XVIII, 1909, pp. 71-75).

[2] Nella Nota ora citata.

Reciprocamente: siano verificate le (11), per ogni funzione $\theta(x)$ che sia soluzione effettiva delle (1). In tal caso, posto:

$$k_i = \int_a^b \theta(x)\, \varphi_i(x)\, dx\,,$$

si deve avere:

$$\theta(x) = \sum_1^{n_1}{}_i\, k_i\, \mu_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_i\, k_i\, \mu_i(x) + \cdots;$$

donde, moltiplicando per $g(x)$, e integrando per serie, si avrà:

$$0 = \int_a^b g(x)\, \theta(x)\, dx = \sum_1^{n_1}{}_i\, k_i \int_a^b g(x)\, \mu_i(x)\, dx + \cdots$$

Dunque deve essere:

$$\int_a^b g(x)\, \mu_i(x)\, dx = 0\,. \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots)$$

Risulta, pertanto, chiaramente spiegato perchè la condizione (b) e la (11) sono sostituibili l'una all'altra: esse, infatti, equivalgono entrambe all'unica condizione (10).

7. Vogliamo, da ultimo, fare un'osservazione relativa all'equazione integrale di prima specie (9).

Se il nucleo $K(x\,, y)$ è aperto rispetto alle x, occorre che le condizioni (a) e (b) siano soddisfatte per l'esistenza di una soluzione $h_1(y)$ della (9) e allora si ha [1]:

$$h_1(y) = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i\, \lambda_i\, \psi_i(y) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_i\, a_i\, \lambda_i\, \psi_i(y) + \cdots \qquad \left(a_i = \int_a^b g(x)\, \varphi_i(x)\, dx\right)$$

La soluzione $h_1(y)$ sarà poi *unica* solo nel caso in cui il nucleo $K(x\,, y)$ risulti *chiuso rispetto alle* y [2].

Se, invece, il nucleo $K(x\,, y)$ è aperto rispetto alle y; se, cioè, vi sono soluzioni effettive $\varrho(y)$ dell'equazione:

$$\int_a^b K(x\,, y)\, \varrho(y)\, dy = 0\,, \tag{12}$$

o, ciò che fa lo stesso, delle equazioni:

$$\int_a^b \varrho(y)\, \psi_i(y)\, dy = 0\,, \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots) \tag{13}$$

[1] G. Lauricella, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie* (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, tom. XX, 1911, pp. 528-536).

[2] Cfr. la nostra Nota: *Sui sistemi di equazioni integrali di 1ª specie* (idem, serie 5ª, tom. XXII, 1913, pp. 13-20).

in tal caso la soluzione della (9) conterrà una funzione arbitraria. E precisamente, se si sceglie una funzione arbitraria qualsiasi $\chi(y)$ nell'intervallo (ab), purchè la serie $\sum_i \alpha_i \psi_i(y)$, con $a_i = \int_a^b \chi(x)\, \psi_i(y)\, dy$, sia integrabile termine a termine in (ab), la funzione:

$$\varrho(y) = \chi(y) - \sum_i \alpha_i \psi_i(y)$$

soddisferà all'equazione integrale (12) e si potrà scrivere:

$$h(y) = h_1(y) + \varrho(y).$$

Ora, indicando con $\nu_1(y), \nu_2(y), \ldots$ il sistema complementare di Ψ, si può applicare il teorema II (n. 4) alla funzione $\varrho(y)$, giacchè sono soddisfatte le (13), e quindi si avrà:

$$\varrho(y) = \sum_1^{s_1}{}_i\, b_i\, \nu_i(y) + \sum_{s_1+1}^{s_2}{}_i\, b_i\, \nu_i(y) + \cdots \qquad \left(b_i = \int_a^b \varrho(y)\, \nu_i(y)\, dy\right)$$

Pertanto la soluzione dell'equazione (9) risulterà espressa in questo modo:

$$h(y) = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i\, \lambda_i\, \psi_i(y) + \cdots + \sum_1^{s_1}{}_i\, b_i\, \nu_i(y) + \cdots$$

Astronomia pratica. — *Sulla costruzione delle tavole per correzione del passo dei microscopi micrometrici.* Nota di B. Viaro, presentata dal Socio E. Millosevich.

Matematica. — *Su una proposizione dell'Almansi.* Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Corrisp. E. Almansi.

Matematica. — *Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un.* Nota di Lucien Godeaux, presentata dal Corrispondente F. Enriques.

Fisica. — *Sulla formazione della rugiada e della brina.* Nota di Antonino Lo Surdo, presentata dal Corrisp. A. Garbasso.