ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 gennaio 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate.* Nota del Corrispondente O. Tedone.

1. In una Nota pubblicata in questi Rendiconti, nell'anno scorso (1), ho mostrato come si può pervenire a determinare l'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate col metodo delle caratteristiche, nella sua primitiva forma di Riemann-Volterra. Lasciando da parte il paragone fra i risultati precedenti e quelli che si otterrebbero applicando alla stessa equazione il metodo delle caratteristiche com'è stato modificato dall'Hadamard (2), che pure sarebbe certamente interessante a farsi, noterò che una espressione del sopraddetto integrale generale, analoga alla formola di Poisson per l'ordinaria equazione delle onde, si trova nel Riemann-Weber (3). Questa formola è dedotta, in quel libro, con artificio elegante dall'integrale generale della cosiddetta equazione dei telegrafisti, che non è altro se non la stessa equazione delle onde smorzate, pel caso di due variabili. Stante l'importanza innegabile dell'argomento, mi permetto di mostrare brevemente, in questa Nota, come dalla formola da me data si ottenga quella ricordata del Weber, anche per mettere in vista una nuova e notevole relazione integrale fra le funzioni di Bessel.

(1) Seduta 31 maggio 1913.
(2) Acta math., tom. 31, pag. 333.
(3) Part. Diff.-gleich. der math. Physik, 2er Bd., ediz. 1901, pag. 310.

2. L'equazione della propagazione delle onde smorzate, nella mia Nota citata, è stata considerata sotto la forma

$$(1)\qquad \Delta^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \varphi = 0\,,$$

alla quale si può sempre ridurre. E, indicando con x_1, y_1, z_1, t_1 le coordinate di un determinato punto nello spazio lineare (x, y, z, t) l'integrale generale della (1) è stato trovato sotto la forma

$$(2)\qquad \varphi(x_1, y_1, z_1, t_1) = -\Phi + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t_1^2} - \frac{\partial}{\partial t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Phi\,\frac{I_1(t_1-t)}{t_1-t}\,dt\,,$$

dove

$$(3)\qquad \Phi = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma [\varphi D\varphi' - \varphi' D\varphi]\,d\Sigma\,,$$

Σ essendo la porzione di una varietà regolare, del resto, arbitraria, a tre dimensioni compresa nell'ipercono caratteristico uscente dal punto (x_1, y_1, z_1, t_1). È, inoltre, t_0 il valore di t nel punto comune a Σ ed alla parallela all'asse t condotta pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1),

$$D\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos nz - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos nt\,,$$

$$\varphi' = \left(\frac{t_1-t}{r} - 1\right)\frac{I_1\left(\sqrt{(t_1-t)^2 - r^2}\right)}{\sqrt{(t_1-t)^2 - r^2}}\,,$$

$$r = \sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}\,,$$

e, infine, è supposto t_1 più grande del valore che t assume nella porzione di Σ che compare nelle (2) e (3).

Per ottenere dalla (2) la formola del Weber, supporremo che Σ appartenga costantemente all'iperpiano $t = 0$. Bisognerà allora fare $t_0 = 0$ e porre $t = 0$ nell'espressione di φ'. Dobbiamo porre inoltre:

$$D\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,,\quad D\varphi' = -\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t_1}\right)_{t=0}\,,$$

per cui

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial t_1} + \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} d\Sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{t_1} r^2\,dr\int_\Omega\left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial t_1} + \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} d\Omega\,,$$

Ω essendo la superficie di una sfera ordinaria di raggio uno dell'iperpiano $t = 0$ col centro nel punto (x_1, y_1, z_1).

Ponendo:

$$\frac{r}{4\pi}\int_\Omega \varphi\, d\Omega = \psi(r) \quad , \quad \frac{r}{4\pi}\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, d\Omega = \Psi(r) \, , \tag{4}$$

possiamo anche scrivere

$$\Phi = \int_0^{t_1} r\, dr \left[\psi(r) \frac{\partial \varphi'}{\partial t_1} + \Psi(r)\, \varphi' \right]_{t=0} .$$

Di qui abbiamo:

$$2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_1^2} = \psi'(t_1) + \Psi(t_1) + \frac{t_1}{2}\psi(t_1) +$$

$$+ 2\int_0^{t_1} r\, dr \left[\psi(r) \frac{\partial^3 \varphi'}{\partial t_1^3} + \Psi(r) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t_1^2} \right]_{t=0} ,$$

ed anche

$$\int_0^{t_1} \Phi \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, dt = \int_0^{t_1} r\, dr \int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t} \left[\psi(r) \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \Psi(r)\, \varphi' \right] dt$$

con

$$\varphi' = \left(\frac{t}{r} - 1 \right) \frac{\mathrm{I}_1\left(\sqrt{t^2 - r^2}\right)}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2 - r^2}\right),$$

per cui

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_0^{t_1} \Phi \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, dt =$$

$$= \int_0^{r} r\, dr \frac{\partial}{\partial t_1} \int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t} \left[\psi(r) \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \Psi(r)\, \varphi' \right] dt .$$

Sostituendo questi risultati nella (2), e notando che

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t} \mathrm{I}_0\left(\sqrt{(t^2 - r^2)}\right) dt = r \int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t} \varphi' dt ,$$

si ottiene

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t_1) = \psi'(t_1) + \Psi(t_1) + \frac{t_1}{2}\psi(t_1) + \tag{5}$$

$$+ \int_0^{t_1} dr \left[\psi(r) \frac{\partial}{\partial t_1} + \Psi(r) \right] \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[- \mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2 - r^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2 - r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1} \int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t} \mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2 - r^2}\right) dt \right] .$$

Avremo ottenuto la formola di Weber se potremo dimostrare che

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\Bigg[-\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)+2\,\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial t_1}\int_r^{t_1}\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)dt\,\Bigg]=-\frac{\partial}{\partial r}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right),$$

ossia, ricordando la relazione

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)=\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right),$$

che

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)-$$
$$-\int_r^{t_1}\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)dt\,\Bigg]=0\,.$$

3. Mostreremo, a questo scopo, che sussiste l'identità

$$\int_r^{t_1}\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)dt=\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right).\tag{6}$$

Cominciamo a far vedere che, ponendo:

$$\mathrm{A}_{n,p}=\sum_0^p{}_m\,\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{n+p-2m}{p-m}=\tag{7}$$
$$=\sum_0^p{}_m\,\frac{1}{p-m+1}\binom{2p-2m}{p-m}\binom{n-p+2m}{m},$$

è pure

$$\mathrm{A}_{n,p}=\binom{n+p+1}{p}.\tag{8}$$

Si vede subito, infatti, che, fra le $\mathrm{A}_{n,p}$, sussiste la relazione

$$\mathrm{A}_{n+1,p}=\mathrm{A}_{n,p}+\mathrm{A}_{n,p-1}\,.$$

D'altra parte, nella mia Nota più volte citata, è stata dimostrata la (8) per $n=p$, e, immediatamente, si mostra che essa è giusta, qualunque sia n, per $p=0\,,1\,,2\,,\dots$; essa dunque resta dimostrata in generale.

Ciò posto, notiamo che, dalle relazioni:

$$\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)=\sum_0^\infty{}_i\,\frac{(t^2-r^2)^i}{2^{2i}\,i!\,i!}\quad,\quad\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}=\sum_0^\infty{}_j\,\frac{(t_1-t)^{2j}}{2^{2j}\,j!\,(j+1)!},$$

abbiamo

$$\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)=\sum_0^\infty{}_n\,\frac{1}{2^{2n}}\sum_0^n{}_m\,\frac{(t_1-t)^{2(n-m)}}{(n-m)!\,(n-m+1)!}\,\frac{(t^2-r^2)^m}{m!\,m!}$$

e, quindi,

$$\int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right) dt =$$

$$= \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{2^{2n}} \sum_0^n{}_m \frac{1}{(n-m)!\,(n-m+1)!\,m!m!} \int_r^{t_1} (t_1-t)^{2(n-m)}\,(t^2-r^2)^m\,dt .$$

Ponendo, nell'integrale a secondo membro,

$$t_1 - t = (t_1 - r)\,\xi ,$$

subito si trova

$$\int_r^{t_1} (t_1-t)^{2(n-m)}\,(t^2-r^2)^m\,dt =$$

$$= (t_1-r)^{2n-m+1} \int_0^1 \xi^{2(n-m)}\,(1-\xi)^m\,[(t_1-r)(1-\xi)+2r]^m\,d\xi =$$

$$= (t_1-r)^{n+1} \sum_0^m{}_h \frac{m!}{h!\,(m-h)!}\,\frac{(2n-2m)!\,(2m-h)!}{(2n-h+1)!}\,(2r)^h\,(t_1-r)^{n-h} .$$

Sostituendo, risulta

$$\int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right) dt =$$

$$= \sum_0^\infty{}_n \frac{(t_1-r)^{n+1}}{2^{2n}} \sum_0^n{}_h \frac{1}{h!\,(2n-h+1)!}\,(2r)^h\,(t_1-r)^{n-h} \times$$

$$\times \sum_h^n{}_m \frac{1}{n-m+1} \binom{2n-2m}{n-m} \binom{2m-h}{m} ;$$

e, per essere

$$\sum_h^n{}_m \frac{1}{n-m+1} \binom{2n-2m}{n-m} \binom{2m-h}{m} =$$

$$= \sum_0^{n-h}{}_m \frac{1}{n-h-m+1} \binom{2(n-h)-2m}{n-h-m} \binom{n-(n-h)+2m}{m} =$$

$$= \binom{2n-h+1}{m} ,$$

può scriversi

$$\int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right) dt =$$

$$= \sum_0^\infty{}_n \frac{(t_1-r)^{n+1}}{2^{2n}\,n!\,(n+1)!} \sum_0^n{}_h \frac{n!}{h!\,(n-h)!}\,(2r)^h\,(t_1-r)^{n-h} =$$

$$= (t_1-r) \sum_0^\infty{}_n \frac{(t_1^2-r^2)^n}{2^{2n}\,n!\,(n+1)!} = (t_1-r)\,\frac{\mathrm{I}_0'\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)}{\sqrt{t_1^2-r^2}} :$$

il che dimostra completamente il nostro asserto.