ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili.* Nota II del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

4. DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA GENERALE. — Le condizioni più generali sotto cui una varietà algebrica può possedere un'infinità (discontinua) di sistemi regolari d'integrali riducibili, sono espresse dal seguente teorema:

I. *Quando sopra una varietà (o curva) algebrica possedente p integrali semplici di 1^a specie, esistono $\mu(\geq 2)$ sistemi regolari indipendenti di $q_1, q_2, \dots, q_\mu$ integrali riducibili (ove $q_1 + \dots + q_\mu \leq p$), ed un altro sistema regolare ∞^{q-1}, indipendente da ciascuno di essi, ma contenuto nel loro sistema congiungente, la varietà possiede un'infinità discontinua di sistemi regolari di q integrali riducibili.*

Dicendo che i μ sistemi dati, $A_1, A_2, \dots, A_\mu$, sono *indipendenti*, intendiamo che non esista alcun legame lineare (a coefficienti non tutti nulli) fra i loro integrali, cioè che il loro sistema congiungente (regolare) K, abbia la dimensione $\sum_{i=1}^{\mu} q_i - 1$. L'ulteriore sistema regolare ∞^{q-1}, che si suppone contenuto in K verrà indicato con A.

Ricorrendo, al solito, alla rappresentazione degli integrali della data varietà, coi punti dello spazio S, a $p-1$ dimensioni, avremo ivi gli spazî $A, A_1, \dots, A_\mu, K$ imagini dei sistemi omonimi. Nelle ipotesi poste, gli spazî $A_1, A_2, \dots, A_\mu$ sono tra loro indipendenti, ed A è indipendente da ciascuno di essi.

Indicato con Σ_h lo spazio, a $\Sigma q_i - q_h - 1$ dimensioni, congiungente i $\mu - 1$ sistemi $A_1, \dots, A_{h-1}, A_{h+1}, \dots, A_\mu$, si prova facilmente, con elemen-

cari *non alberesi*, scisti argillosi e pietra forte in strati alternanti con nummuliti ed inocerami, probabilmente (anzi certamente non) di trasporto », forma una zona immediatamente sovrastante a quella dell'*Arenaria Macigno* insieme con l'$e^1{}_s$, ed a questa zona, non a quella $e^2{}_c$, dovevasi aggiungere « pietra da calce idraulica e da cementi ». A questa zona rispondono alcuni degli strati più a monte nei dintorni di Prato, confusi con la zona e^2. Finalmente la zona $e^2{}_c$ è definita come « calcari » (non) « alberesi, con *Helminthoidea labyrinthica* e straterelli di arenaria interposti », Ma non è la più alta dell'Eocene: tali sono invece le zone $e^3{}_d$ ed in parte la e^2.

Lo Steinmann, forse, in questo ordinamento non si è bene raccapezzato e non ha conosciuto i lavori di quelli che hanno compreso in modo differente la serie geologica dei dintorni di Firenze e dell'Appennino.

tari considerazioni iperspaziali [1], che gli spazî $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\mu$ non hanno punti comuni. È questa un'osservazione che ci gioverà al n. 8.

Dico ora che per dimostrare il teorema I, basta limitarsi a considerare il caso in cui i $\mu + 1$ sistemi $A, A_1 \ldots, A_\mu$, sono a μ a μ indipendenti. Supponiamo, perciò, che il teorema sia già stato dimostrato sotto questa condizione, e si consideri il caso in cui la condizione stessa non è soddisfatta. Allora lo spazio A s'appoggerà a qualcuno degli spazî $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\mu$. Si appoggi, p. es., a Σ_μ, e sia A' lo spazio a $q' - 1$ $(q' \leq q)$ dimensioni, intersezione di A e di Σ_μ. Avremo entro al sistema regolare Σ_μ, congiungente dei sistemi indipendenti $A_1, A_2, \ldots, A_{\mu-1}$, un sistema regolare A', indipendente da ciascuno di essi. Se i μ sistemi $A', A_1, \ldots, A_{\mu-1}$ sono a $\mu - 1$ a $\mu - 1$ indipendenti, si potrà applicare il teorema I; se no, si proseguirà similmente, passando da μ sistemi a $\mu - 1$, e così via.

Si perverrà infine ad un sistema regolare $A^{(j)}$, di dimensione $q^{(j)} - 1$, contenuto in A, e a cui sarà applicabile il teorema I, per modo che $A^{(j)}$ apparterrà ad un'infinità discontinua di sistemi analoghi.

Detto $B^{(j)}$ un complementare di $A^{(j)}$ in A, i sistemi che congiungono $B^{(j)}$ con quelli della suddetta infinità discontinua, saranno altrettanti sistemi regolari di dimensione ∞^{q-1}. E il teorema I risulterà pertanto stabilito, anche a prescindere dalla restrizione posta.

Esaminiamo dunque il caso in cui gli spazî $A, A_1, \ldots, A_\mu$ sono a μ a μ indipendenti. Da ogni punto di A esce allora [2] uno, ed un solo spazio, $S_{\mu-1}$, appoggiato ulteriormente in un punto ad $A_1, A_2, \ldots A_\mu$. Fissato uno, C, di questi ∞^{q-1} $S_{\mu-1}$, su esso, $A, A_1, \ldots, A_\mu$ segnano rispettivamente $\mu + 1$ punti indipendenti $a, a_1, \ldots, a_\mu$, i quali possono assumersi come base di una rete di Möbius di specie $\mu - 1$; ed è chiaro che gli spazî dedotti da $A, A_1, \ldots, A_\mu$ con operazioni interne di proiezione e di sezione, restano biunivocamente coordinati alle loro traccie su C, cioè agli spazî $S_0, S_1, \ldots, S_{\mu-2}$, appartenenti alla suddetta rete. Cosicchè quegli spazî risultano in numero infinito come queste traccie. In particolare, agl'infiniti vertici della rete restano coordinati infiniti S_{q-1}, rappresentanti altrettanti sistemi regolari.

Resta così dimostrato il teorema I, e *si vede inoltre come gl'infiniti sistemi regolari ∞^{q-1}, deducibili dai $\mu + 1$ sistemi dati, possan coordinarsi biunivocamente ai vertici di una rete di Möbius di specie $\mu - 1$.*

Ciò dà l'esatta struttura dell'infinità discontinua formata dai sistemi regolari ∞^{q-1}, appartenenti alla nostra varietà: gli elementi di quell'infinità sono infatti assimilabili ai *punti razionali* di uno spazio $S_{\mu-1}$.

[1] Cfr., p. es., Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî*, ecc. (Pisa, Spoerri, 1907), pp. 12-13. Qui, veramente, si considera lo spazio comune alle proiezioni di $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_\mu$ da un generico punto di K. Ma, nel caso nostro, vale lo stesso ragionamento.

[2] Ved. Bertini, loc. cit.

L'unico caso che sfugge alla dimostrazione precedente, è quello $\mu = 2$, giacchè allora C è una retta. Ma in tal caso si procederà come nell'osservazione alla fine del n. 3. Si comincerà cioè coll'ampliare il sistema K, facendone la proiezione da un sistema B d'integrali riducibili, identico, per esempio, ad A; e si osserverà che il sistema L, ∞^{2q-1}, congiungente A, B, contiene infiniti sistemi analoghi ad A, B, ognuno dei quali si ottiene combinando linearmente, con due prefissati coefficienti intieri, le coppie d'integrali corrispondenti di A, B. Si può pertanto assumere in L un sistema A' — indipendente da A, B — per guisa che i quattro sistemi A', B, A_1, A_2 siano a tre a tre indipendenti. Si ricade allora nel caso $\mu = 3$, e si conclude che nel sistema K esistono infiniti sistemi regolari ∞^{q-1}, biunivocamente coordinati ai vertici di una rete di Möbius di specie 1.

Osservazione. — Se la varietà V possiede almeno due sistemi regolari indipendenti A, B d'integrali riducibili, tali che B sia indipendente anche da un complementare C di A, poichè A, C sono pur essi indipendenti, e, d'altra parte, al loro sistema congiungente S appartiene B, applicando il teorema precedente ($\mu = 2$), si ha che:

Una varietà algebrica, la quale possegga due sistemi regolari indipendenti A, B *d'integrali riducibili, tali che l'uno*, B, *di essi, sia indipendente anche dal sistema complementare di* A, *contiene in conseguenza tutta un'infinità discontinua di sistemi regolari, della stessa dimensione di* A *o di* B.

Da ciò segue che *se il complementare di un dato sistema regolare* A, *non è individuato, la varietà contiene infiniti sistemi regolari, della stessa dimensione di* A. Invero, se B, C son due diversi complementari di A, e se essi son tra loro indipendenti, vale quanto precede. Se invece B, C hanno in comune un sistema (regolare) D, il complementare E di D, p. es., entro C, è indipendente da A e da B, e quindi si ricade ancora nel caso precedente.

5. Configurazioni normali di sistemi d'integrali riducibili. — La costruzione geometrica esposta nel n. 4, si può determinare ulteriormente, qualora si supponga che gli spazî $A, A_1, \ldots, A_\mu$, a μ a μ indipendenti, abbiano la stessa dimensione $q - 1$.

Ma prima di occuparci di ciò, mostriamo come a questo caso ci si possa sempre ridurre, quando V possegga infiniti sistemi regolari d'integrali riducibili.

È invero ben chiaro, anzitutto, che, in tale ipotesi, esisteranno sempre $\mu + 1$ ($\mu \geq 2$) sistemi regolari $A, A_1, \ldots, A_\mu$ nelle condizioni dell'enunciato del teorema I. Si può inoltre ammettere (n. 4) che gli spazî $A, A_1, \ldots, A_\mu$ siano a μ a μ indipendenti, e, quindi (poichè il loro spazio congiungente K ha la dimensione $\Sigma q_i - 1$), che $q \leq q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$.

Poniamo precisamente $q \leq q_1 \leq q_2 \dots \leq q_\mu$. Allora lo spazio Σ, congiungente $A, A_1, \dots, A_{\mu-1}$, incontra A_μ in uno spazio A'_μ di dimensione $q-1$, per modo che entro a Σ si hanno $\mu+1$ sistemi $A, A'_\mu, A_1, \dots, A_{\mu-1}$, di dimensioni rispettive $q-1, q-1, q_1-1, \dots, q_{\mu-1}-1$, a μ a μ indipendenti. Lo spazio Σ' congiungente $A, A'_\mu, \dots, A_{\mu-2}$, incontra similmente $A_{\mu-1}$ secondo uno spazio $A'_{\mu-1}$, di dimensione $q-1$; ecc. *Così proseguendo, si ottengono, entro uno spazio a $\mu q - 1$ dimensioni, $\mu+1$ spazi a $q-1$ dimensioni, che indicheremo ancora con $A, A_1, \dots, A_\mu$, a μ a μ indipendenti, e rappresentanti altrettanti sistemi regolari d'integrali riducibili.*

Gl'infiniti sistemi regolari dedotti da $A, A_1, \dots, A_\mu$, con operazioni interne di proiezione e di sezione, si diranno costituire una *configurazione normale di sistemi ∞^{q-1} d'integrali riducibili.*

6. Il minimo continuo cui appartengono gl'infiniti sistemi di una configurazione normale. — Nello spazio K, di dimensione $\mu q - 1$, sieno $A, A_1, \dots, A_\mu$ i dati spazî a $q-1$ dimensioni, a μ a μ indipendenti, imagini di altrettanti sistemi regolari.

Vi sono ∞^{q-1} spazî C, a $\mu-1$ dimensioni, i quali s'appoggiano (in un punto) a ciascuno degli A. Essi riempiono una varietà, evidentemente razionale, M, a $\mu+q-2$ dimensioni, di cui vogliamo indicare rapidamente le più importanti proprietà, che si stabiliscono con elementari considerazioni di geometria proiettiva iperspaziale.

Due spazî A sono punteggiati omograficamente dagli spazî C, così che *la varietà* M *può anche definirsi come il luogo degli spazî congiungenti le μ-ple di punti omologhi tolti da μ spazî S_{q-1} omografici.* Ne deriva che q generici spazî C sono indipendenti, e che ogni S_{q-1}, il quale incontri $q+1$ spazî C generici (vi sono $\infty^{\mu-1}$ spazî S_{q-1} siffatti), incontra ogni altro C, cioè appartiene ad M.

La varietà M *viene pertanto a contenere due schiere H_a, H_c, rispettivamente $\infty^{\mu-1}$, ∞^{q-1} di spazî S_{q-1}, $S_{\mu-1}$*: per ogni punto di M passa uno spazio dell'una schiera e uno spazio dell'altra; μ o, rispettivamente, q spazî generici della 1ª o della 2ª schiera, sono tra loro indipendenti; due spazî di una schiera sono punteggiati omograficamente da quelli dell'altra. Alla schiera H_a appartengono evidentemente gli spazî A dati.

Indichiamo, al solito, con Σ_i $(i = 1, 2, \dots, \mu)$ lo spazio che congiunge $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_\mu$. Per Σ_i passa un sistema lineare L_i, ∞^{q-1} di spazî $S_{(\mu-1)q}$ e, preso uno spazio di ciascuno degli L, resta individuato, come intersezione dei μ spazî scelti, un $S_{\mu-1}$, il quale appoggiasi ad A_1, $A_2, \dots, A_\mu$ (1). Ne deriva che *gli spazî generatori della schiera H_c possono tutti ottenersi come intersezioni di μ $S_{(\mu-1)q}$ omologhi in una pro-*

(1) Bertini, loc. cit., pp. 12-13.

spettività, che nasce tra i sistemi L, prendendo per corrispondenti due spazî uscenti da un medesimo punto di A. *In maniera analoga si potrebbero ottenere gli spazî della schiera* H_a, a partire da $q+1$ spazî generatori di H_c.

Se indichiamo con

$$\nu_1 f_1^{(i)} + \cdots + \nu_q f_q^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

le equazioni dei sistemi lineari di iperpiani passanti per $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\mu$, e supponiamo le f scelte in modo che nella prospettività d'asse A sieno omologhi μ iperpiani corrispondenti agli stessi valori delle ν, la M viene rappresentata dall'annullare i minori di secondo ordine della matrice delle f, ed ha quindi [1] l'ordine $\binom{\mu+q-2}{q-1}$.

È chiaro che uno spazio S_{q-1}, il quale sia deducibile con operazioni interne di proiezione e di sezione (in particolare, mediante costruzioni di quarti armonici), dagli spazî $A, A_1, \ldots, A_\mu$, appoggiasi in un punto a ciascuno dei C e quindi giace nella schiera H_a. Gl' infiniti spazî generatori di H_a, che si ottengono con tali operazioni, si può dire che formano una rete R di Möbius, la quale ha come « base » $\mu+1$ spazî S_{q-1} a μ a μ indipendenti di un $S_{\mu q-1}$ (mentre quella considerata al n. 3, aveva come base un gruppo di $\mu+1$ punti a μ a μ indipendenti di un $S_{\mu-1}$).

Ogni varietà *continua*, che, entro allo spazio ambiente S_{p-1}, contenga tutti gli S_{q-1} di R, dovrà contenere anche gli *spazi-limiti* di quelli, cioè *tutti* gli spazî generatori di H_a.

Si conclude pertanto:

II. *Quando una varietà (o curva) algebrica* V *contiene* $\mu+1$ *sistemi regolari* $A, A_1, \ldots, A_\mu$ $(\mu \geq 2)$, ∞^{q-1}, *a* μ *a* μ *indipendenti, ma congiunti da un sistema* K, $\infty^{\mu q-1}$, *d'integrali riducibili di 1ª specie, essa contiene in conseguenza infiniti altri sistemi regolari* ∞^{q-1}, *i quali costituiscono la rete di Möbius, di specie* $\mu-1$, *che ha come base* $A. A_1, \ldots, A_\mu$. *Il minimo continuo contenente quest' infiniti sistemi, entro alla totalità degl'integrali semplici di 1ª specie di* V, *è una varietà razionale* M, *di dimensione* $\mu+q-2$ *e di ordine* $\binom{\mu+q-2}{q-1}$.

Ogni varietà algebrica con infiniti sistemi d'integrali riducibili, possiede, per convenienti valori degl'interi μ, q, *una siffatta configurazione di sistemi regolari.*

7. Esistenza effettiva di varietà algebriche soddisfacenti alle ipotesi dei precedenti teoremi. — I teoremi fin qui dimostrati

[1] Cfr. Segre, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei (5), tomo IX, 1900, pag. 253.

lasciano in sospeso la questione d'esistenza di varietà, godenti delle proprietà indicate.

Fissato il numero p degl' integrali semplici, indipendenti di 1ª specie, d'una varietà algebrica — cioè la dimensione della relativa varietà di Picard — e scelti $\mu+1$ interi positivi, non nulli, $q, q_1, \ldots, q_\mu$ ($q \leq q_1 \leq \leq q_\mu$), tali che $q_1 + \cdots + q_\mu \leq p$, si può costruire una varietà di Picard V_p, per la quale sieno soddisfatte le ipotesi del teorema I, e per conseguenza anche quelle del II?

Veramente, al n. 4 non si supponeva che q fosse il più piccolo dei $\mu+1$ interi fissati: ma, come abbiamo avvertito al n. 5, tale condizione, in realtà, non è restrittiva. La questione di ricercare se possa esistere una V_p contenente $\mu+1$ sistemi regolari, rispettivamente di $q, q_1, \ldots, q_\mu$, integrali riducibili, a μ a μ indipendenti fra loro, ma congiunti da un sistema di dimensione $\Sigma q_i - 1$, in sostanza riducesi a esaminare se le equazioni lineari omogenee, a coefficienti interi, che, in virtù delle ipotesi poste, vengono a legare i periodi normali degl' integrali di V_p, sieno compatibili colle note disuguaglianze esprimenti appunto le condizioni di esistenza di V_p (¹).

Noi verificheremo *a priori* tale compatibilità, mostrando come si possa costruire un particolare modello di V_p, soddisfacente alle suddette ipotesi.

A tal uopo si consideri anzitutto la varietà picardiana W, di dimensione μq, i cui elementi sono la μ-ple di punti tolti rispettivamente da μ varietà picardiane di dimensione q, *birazionalmente identiche* fra loro, ma, del resto, affatto qualunque. A W appartengono μ sistemi regolari D_1, $D_2, \ldots, D_\mu$:

$$u'_1, \ldots, u'_q \,;\, u''_1, \ldots, u''_q \,; \ldots ;\, u_1^{(\mu)}, \ldots, u_q^{(\mu)},$$

identici fra loro (n. 2). Si verifica subito che il sistema D, individuato dagl' integrali

$$v_1 = u'_1 + \cdots + u_1^{(\mu)}, \ldots, v_q = u'_q + \cdots + u_q^{(\mu)}$$

ha la dimensione $q-1$, è regolare ed identico ai D_i. Inoltre è chiaro che $D, D_1, \ldots, D_\mu$ sono a μ a μ indipendenti. La W è insomma nelle condizioni contemplate dal teorema II, e contiene pertanto una configurazione normale di sistemi regolari ∞^{q-1}.

Ciò posto, fissiamo $\mu+1$ picardiane $V^{(0)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(\mu)}$, di dimensioni rispettive $p - \Sigma q_i, q_1 - q, \ldots, q_\mu - q$; e consideriamo la picardiana Φ delle $(\mu+2)$-ple di punti tolti da esse e da W. Avremo in Φ $\mu+1$ sistemi regolari $D, D_1, \ldots, D_\mu$, imagini dei sistemi omonimi di W, e altri $\mu+1$ sistemi regolari $C, C_1, \ldots, C_\mu$ imagini dei sistemi d' integrali appartenenti

(¹) Ved. p. es. Krazer, op. cit., pag. 17.

rispettivamente a $V^{(0)}, V^{(1)}, \dots, V^{(\mu)}$. Indichiamo con $A_1, \dots, A_\mu$ i sistemi congiungenti rispettivamente di $C_1, D_1; \dots; C_\mu, D_\mu$. Allora i $\mu+1$ sistemi $A(=D), A_1, \dots, A_\mu$ saranno a μ a μ indipendenti, ed il loro sistema congiungente, il cui complementare è C, avrà la dimensione $\Sigma q_i - 1$. La Φ soddisfa pertanto alle ipotesi del teorema I. Si conclude che *se* $q, q_1, \dots, q_\mu$ *sono* $\mu+1$ *interi positivi, non nulli* ($q \leq q_1 \leq \dots \leq q_\mu$), *soddisfacenti alla disuguaglianza* $q_1 + q_2 + \dots + q_\mu \leq p$, *esiste sempre una varietà algebrica possedente p (e soltanto p) integrali semplici di 1ª specie, per la quale si verificano tutte le condizioni del teorema I.*

È superfluo di avvertire che questa conclusione non è senz'altro applicabile alle *curve* di genere $p > 3$, perchè i periodi normali dei loro integrali di 1ª specie, sono legati da $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ relazioni, delle quali non si può *a priori* affermare la compatibilità colle condizioni suddette. È però certo che, una volta scelti gl'interi $q, q_1, \dots, q_\mu$, si può sempre costruire una curva di genere $\pi(\geq p)$, abbastanza alto, soddisfacente al teorema I. Basterà all'uopo considerare una curva generica tracciata sopra una varietà con p integrali semplici di 1ª specie, che soddisfaccia al teorema suddetto.

Per le superficie (o varietà algebriche superiori) non havvi invece alcune limitazione, perchè, come hanno dimostrato Castelnuovo-Enriques [1], i periodi normali degl'integrali semplici di 1ª specie d'una superficie (o varietà) possono scegliersi del tutto ad arbitrio, compatibilmente colle già ricordate disuguaglianze.

Si può in conseguenza affermare p. es. che:

Dati ad arbitrio gl'interi positivi p, μ ($\mu \leq p$), *esiste sempre una superficie algebrica* F, *d'irregolarità p, contenente un'infinità discontinua di fasci ellittici di curve, tale che gli elementi (fasci) di quest'infinità possano rappresentarsi biunivocamente coi punti razionali di uno spazio a* $\mu - 1$ *dimensioni.*

In particolare, *nel caso* $\mu = p$, *su* F *esistono infiniti integrali ellittici infinitamente vicini ad ogni integrale semplice di 1ª specie della superficie.*

8. Dimostrazione analitica del teorema I. — Poniamoci ora nuovamente nelle ipotesi del teorema I, e conserviamo le notazioni del n. 4.

Siano $u_1^{(i)}, \dots, u_{q_i}^{(i)}$ q_i integrali indipendenti di $A_i (i = 1, 2, \dots, \mu)$; $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2p}$ $2p$ cicli lineari primitivi della data varietà V, ed $\omega_{l1}^{(i)}, \dots, \omega_{l.2q_i}^{(i)}$ $(l = 1, 2, \dots, q_i)$ i periodi ridotti di $u_l^{(i)}$, talchè il periodo di $u_l^{(i)}$ al ciclo

[1] *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions,* Annales scientifiques de l'École normale supérieure de Paris, (3), tomo XXIII, 1906, pp. 339-366.

σ_h $(h=1,2,\ldots,2p)$ si potrà scrivere sotto la forma $\sum_{s=1}^{2q_i} m_{hs}^{(i)}\,\omega_{ls}^{(i)}$, ove le m sono interi non tutti nulli, *indipendenti, per un dato i, dall'indice l.* Allora l'integrale generico

$$u=\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{q_i}\lambda_l^{(i)}\,u_l^{(i)} \tag{1}$$

di K, avrà lungo σ_h il periodo

$$\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{s=1}^{2q_i} m_{hs}^{(i)}\sum_{l=1}^{q_i}\lambda_l^{(i)}\,\omega_{ls}^{(i)},$$

sicchè i suoi $2(q_1+\cdots+q_\mu)$ periodi ridotti, ulteriormente irriducibili (n. 1), saranno $\sum_{l=1}^{q_i}\lambda_l^{(i)}\,\omega_{ls}^{(i)}$ $(s=1,2,\ldots,2q_i\,;\ i=1,2,\ldots,\mu)$; e la matrice della sostituzione lineare esprimente i $2p$ periodi fondamentali pei periodi ridotti, sarà:

$$\left\| m'_{h1}\,,\, m'_{h2}\,,\ldots,\, m'_{h.2q_1}\,,\,\ldots\ldots,\, m_{h1}^{(\mu)}\,,\, m_{h2}^{(\mu)}\,,\ldots,\, m_{h\,2q_\mu}^{(\mu)}\right\| \quad (h=1,2,\ldots 2p). \tag{2}$$

Questa matrice è diversa da zero, cioè non sono nulli tutti i suoi minori d'ordine $2(q_1+\cdots+q_\mu)$, perchè altrimenti il numero dei periodi degl'integrali di K si ridurrebbe ulteriormente.

Suppongasi ora che al sistema K appartenga un altro sistema regolare A, ∞^{q-1}, il quale sia indipendente da $A_1, A_2,\ldots, A_\mu$. Sieno $\lambda_{lr}^{(i)}$ $(r=1,2,\ldots,q)$ i valori che vanno attribuiti alle $\lambda_l^{(i)}$ nella (1), per ottenere q integrali indipendenti di A e $\theta_{r1}, \theta_{r2},\ldots,\theta_{r,2q}$ i periodi ridotti dell'integrale r-esimo $(r=1,2,\ldots,q)$. Sussisteranno allora le relazioni

$$\sum_i\sum_s m_{hs}^{(i)}\sum_l \lambda_{lr}^{(i)}\,\omega_{ls}^{(i)}=\sum_{j=1}^{2q} n_{hj}\,\theta_{rj}, \tag{3}$$

$$(r=1,\ldots,q\ ;\ h=1,2,\ldots,2p),$$

le n essendo interi non tutti nulli, indipendenti dall'indice r. Considerando queste relazioni, per un r fissato, come equazioni lineari nelle $2(q_1+\cdots+q_\mu)$ quantità $\sum_l \lambda_{lr}^{(i)}\,\omega_{ls}^{(i)}$, poichè esse son soddisfatte per valori non tutti nulli di queste quantità (chè altrimenti l'r-esimo integrale di A si ridurrebbe ad una costante, in quanto avrebbe nulli tutti i suoi periodi ridotti), la matrice formata dai coefficienti e dai termini noti delle suddette equazioni, dovrà essere nulla.

Se ora si tien conto che fra le θ_{rj} non può sussistere alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti interi (indipendenti dall'indice r), perchè altrimenti gl'integrali di A avrebbero meno di $2q$ periodi ridotti, si conclude che è nulla la matrice

$$(4) \qquad \left\| m'_{h}, m'_{h2}, \ldots, m'_{h.2q_1}, \ldots\ldots, m^{(\mu)}_{h1}, \ldots, m^{(\mu)}_{h.2q_\mu}, n_{hj} \right\| \quad (h=1,2,\ldots,2p),$$

per qualunque indice j $(j=1,2,\ldots 2q)$.

Ciò posto, indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$, μ *interi arbitrari tutti diversi da zero*, e con δ il loro minimo comune multiplo. Le (3) possono anche scriversi sotto la forma

$$(5) \qquad \sum_i \sum_s \overline{m}^{(i)}_{hs} \sum_l \alpha_i \lambda^{(i)}_{lr} \omega^{(i)}_{ls} = \sum_j \overline{n}_{hj} \theta_{rj},$$

ove si è posto

$$\overline{m}^{(i)}_{hs} = \frac{m^{(i)}_{hs}\delta}{\alpha_i}, \quad \overline{n}_{hj} = n_{hj}\delta.$$

Nelle (5), i determinanti d'ordine $2(q_1 + \cdots + q_\mu)$ estratti dalla matrice dei coefficienti $\overline{m}$, uguagliamo evidentemente i corrispondenti determinanti della matrice (2), moltiplicati per l'intero non nullo $\beta = \dfrac{\delta^{2(q_1+\cdots+q_\mu)}}{\alpha_1^{2q_1}\alpha_2^{2q_2}\ldots\alpha_\mu^{2q_\mu}}$; e quindi anche la matrice degl'interi $\overline{m}$ è diversa da zero. Similmente, i determinanti d'ordine $2(q_1 + \cdots + q_\mu) + 1$ estratti dalla matrice delle $\overline{m}$ e delle $\overline{n}$ (per un fissato j), uguagliano i determinanti corrispondenti estratti dalle (4), moltiplicati per l'intero non nullo $\beta\delta$; laonde la matrice delle $\overline{m}, \overline{n}$ è nulla, come la (4).

Ne segue che dalle (5), per r fissato, si possono ricavare le $2(q_1 + \cdots + q_\mu)$ quantità $\sum_l \alpha_i \lambda^{(i)}_{lr} \omega^{(i)}_{ls}$ come combinazioni lineari *a coefficienti razionali indipendenti dall'indice* r, delle θ_{rj}. Ponendo $r=1,2,\ldots,q$, si hanno pertanto q integrali $v_r = \sum_i \sum_l \alpha_i \lambda^{(i)}_{lr} u^{(i)}_l$ coi $2q$ periodi ridotti — ma non generalmente primitivi — θ. Affinchè si possa però affermare che il sistema B individuato dagl'integrali v_r, è regolare, occorre provare che i q integrali stessi sono indipendenti, giacchè allora, e solo allora, ne seguirà che i $2q$ periodi θ sono ulteriormente irriducibili.

Non essendovi alcun legame lineare fra gl'integrali $u^{(i)}_l$, se vi fosse un legame lineare fra gl'integrali v_r, sussisterebbero, per valori non tutti nulli delle ν, le relazioni lineari

$$\sum_{r=1}^{q} \nu_r \lambda^{(i)}_{lr} = 0 \qquad (l=1,2,\ldots,q_i\,;\; i=1,2,\ldots\mu),$$

ed allora sarebbero dipendenti anche gl'integrali scelti entro A. Pertanto il sistema B è regolare e ∞^{q-1}, qualunque sieno gl'interi non nulli α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$.

Ma per poter da ciò dedurre che la varietà possiede infiniti sistemi regolari ∞^{q-1}, occorre provare che a due gruppi generici di valori delle α — e sieno $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\mu)$; $(\alpha''_1, \alpha''_2, \ldots, \alpha''_\mu)$ — corrispondono due sistemi regolari distinti B′, B″.

Si ammetta, se è possibile, che B′, B″ coincidano. Allora la matrice che ha per orizzontale r^{esima} $(r = 1, \ldots, q)$

$$(6) \qquad \alpha'_1 \lambda'_{1r}, \alpha'_1 \lambda'_{2r}, \ldots, \alpha'_1 \lambda_{q_1 r}, \ldots\ldots, \alpha'_\mu \lambda^{(\mu)}_{1r}, \alpha'_\mu \lambda^{(\mu)}_{2r}, \ldots, \alpha'_\mu \lambda^{(\mu)}_{q_\mu r},$$

e per orizzontale $(q+1)^{esima}$

$$(7) \qquad \alpha''_1 \lambda'_{1s}, \alpha''_1 \lambda'_{2s}, \ldots, \alpha''_1 \lambda'_{q_1 s}, \ldots\ldots, \alpha''_\mu \lambda^{(\mu)}_{1s}, \alpha''_\mu \lambda^{(\mu)}_{2s}, \ldots, \alpha''_\mu \lambda^{(\mu)}_{q_\mu s},$$

ove s è un intero fissato nella successione $1, 2, \ldots, q$, dovrà esser nulla, giacchè il suo annullarsi esprime appunto che l'integrale di B″, corrispondente ai valori (7) dei parametri, è contenuto in B′. Sottraendo dall'orizzontale (7) la s^{esima} delle (6) moltiplicata per $\frac{\alpha''_i}{\alpha'_i}$ (ove i è fissato), la nuova matrice, pure nulla, che così si ottiene, viene ad esprimere, col suo annullarsi, che B′ ha un integrale comune col sistema Σ_i, definito al n. 4. Questo integrale comune corrisponde ai valori

$$(8) \qquad \frac{\alpha''_1 \alpha'_i - \alpha''_i \alpha'_1}{\alpha'_i} \lambda'_{1s}, \ldots, \frac{\alpha''_1 \alpha'_i - \alpha''_i \alpha'_1}{\alpha'_i} \lambda'_{q_1 s}, \ldots\ldots,$$
$$0, \ldots, 0, \ldots, \frac{\alpha''_\mu \alpha'_i - \alpha''_i \alpha'_\mu}{\alpha'_i} \lambda^{(\mu)}_{1s}, \ldots, \frac{\alpha''_\mu \alpha'_i - \alpha''_i \alpha'_\mu}{\alpha'_i} \lambda^{(\mu)}_{q_\mu s}$$

dei parametri. Facendo $s = 1, 2, \ldots, q$, si ottengono così q integrali comuni a B′ ed a Σ_i, ed è facile vedere che sono integrali indipendenti. Infatti, qualora essi fossero dipendenti, sarebbe nulla la matrice di cui (8) è la orizzontale s^{esima} $(s = 1, \ldots, q)$, la qual matrice, previa la soppressione dei fattori *non nulli* (per la genericità delle α', α'') comuni alle sue singole verticali, riducesi a quella che ha per orizzontale s^{esima}

$$\lambda'_{1s}, \ldots, \lambda'_{q_1 s}, \ldots, 0, \ldots, 0, \ldots \lambda^{(\mu)}_{1s}, \ldots, \lambda^{(\mu)}_{q_\mu s}.$$

L'annullarsi di questa matrice porterebbe a ciò: che l'integrale di A, $\sum_{r=1}^{q} \varepsilon_r \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{l=1}^{q_j} \lambda^{(j)}_{lr} u^{(j)}_l$, ove le ε son costanti convenienti non tutte nulle, si ridurrebbe ad una combinazione lineare dei soli integrali $u_1^{(i)}, \dots, u_{q_i}^{(i)}$ di A_i, ed esisterebbe perciò un integrale comune ad A, A_i; contro il supposto.

Si può pertanto affermare che, se B′ coincide con B″, il sistema B′ ha in comune con Σ_i, qualunque sia $i (= 1, 2, \dots, q)$, q integrali indipendenti, cioè che B′ è contenuto in Σ_i. I sistemi $\Sigma_1, \dots, \Sigma_q$ vengono pertanto ad avere in comune (almeno) un sistema B′ di dimensione $q - 1 (> 0)$. Ora, come abbiamo già osservato al n. 4, ciò non può accadere, se i sistemi $A_1, \dots, A_\mu$ dati son tra loro indipendenti. Resta così dimostrato, anche per via analitica, il teorema I.

Meccanica. — *Un'osservazione sulle figure d'equilibrio dei fluidi rotanti.* Nota del Corrispondente E. Almansi.

1. Una massa fluida, omogenea, incompressibile, ruoti intorno ad un asse con velocità angolare costante ω.

Assumiamo l'asse di rotazione come asse delle z; gli assi delle x e delle y siano collegati colla massa in movimento.

Denotando con V il potenziale newtoniano della massa fluida, in tutti i punti della superficie σ che limita lo spazio S da essa occupato, deve aversi:

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{cost.}$$

Diciamo ϱ la densità del fluido, k la costante dell'attrazione, e poniamo:

$$U = k\varrho u \quad , \quad V = k\varrho v \, ,$$
$$\omega^2 = 2\alpha k\varrho \, .$$

Nei punti di σ dovrà essere:

$$(1) \qquad u = v + \alpha(x^2 + y^2) = \text{cost.}, \quad \alpha = \text{cost} > 0 \, .$$

Poichè v è il potenziale, per $k = 1$, di una massa di densità 1 che occupi lo spazio limitato da σ, le formule (1) ci dànno una condizione *di natura puramente geometrica*, necessaria affinchè la superficie σ possa rappresentare una figura d'equilibrio.

Denoterò con (a) questa condizione: la condizione, cioè, che nei punti di σ si abbia $v + \alpha(x^2 + y^2) = \text{cost.}$, α essendo una costante positiva.

Ad una superficie σ che verifichi la condizione (a) corrisponde un determinato valore della velocità angolare ω, dato dalla formula $\omega^2 = 2\alpha k\varrho$.