ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ridurrebbe ad una combinazione lineare dei soli integrali $u_1^{(i)}, \dots, u_{q_i}^{(i)}$ di A_i, ed esisterebbe perciò un integrale comune ad A, A_i; contro il supposto.

Si può pertanto affermare che, se B' coincide con B'', il sistema B' ha in comune con Σ_i, qualunque sia $i (= 1, 2, \dots, q)$, q integrali indipendenti, cioè che B' è contenuto in Σ_i. I sistemi $\Sigma_1, \dots, \Sigma_q$ vengono pertanto ad avere in comune (almeno) un sistema B' di dimensione $q - 1 (> 0)$. Ora, come abbiamo già osservato al n. 4, ciò non può accadere, se i sistemi $A_1, \dots, A_\mu$ dati son tra loro indipendenti. Resta così dimostrato, anche per via analitica, il teorema I.

Meccanica. — *Un'osservazione sulle figure d'equilibrio dei fluidi rotanti*. Nota del Corrispondente E. Almansi.

1. Una massa fluida, omogenea, incompressibile, ruoti intorno ad un asse con velocità angolare costante ω.

Assumiamo l'asse di rotazione come asse delle z; gli assi delle x e delle y siano collegati colla massa in movimento.

Denotando con V il potenziale newtoniano della massa fluida, in tutti i punti della superficie σ che limita lo spazio S da essa occupato, deve aversi:

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{cost.}$$

Diciamo ϱ la densità del fluido, k la costante dell'attrazione, e poniamo:

$$U = k\varrho u \quad , \quad V = k\varrho v \, ,$$
$$\omega^2 = 2\alpha k\varrho \, .$$

Nei punti di σ dovrà essere:

$$(1) \qquad u = v + \alpha(x^2 + y^2) = \text{cost.}, \quad \alpha = \text{cost} > 0 \, .$$

Poichè v è il potenziale, per $k = 1$, di una massa di densità 1 che occupi lo spazio limitato da σ, le formule (1) ci dànno una condizione *di natura puramente geometrica*, necessaria affinchè la superficie σ possa rappresentare una figura d'equilibrio.

Denoterò con (a) questa condizione: la condizione, cioè, che nei punti di σ si abbia $v + \alpha(x^2 + y^2) = \text{cost.}$, α essendo una costante positiva.

Ad una superficie σ che verifichi la condizione (a) corrisponde un determinato valore della velocità angolare ω, dato dalla formula $\omega^2 = 2\alpha k\varrho$.

Alla condizione (a) se ne aggiunge ordinariamente una seconda, la quale viene formulata scrivendo che in tutti i punti di σ deve aversi:

$$\frac{\partial U}{\partial n_i} > 0 \quad (n_i = \text{normale int.}).$$

Se diciamo p la pressione, U_0 il valore costante di U sopra σ, si ha, iu un punto qualunque della massa fluida:

$$p = \varrho(u - u_0).$$

La condizione $\frac{\partial U}{\partial n_i} > 0$ significa dunque che la pressione, supposta nulla nei punti di σ, deve risultare positiva nei punti infinitamente vicini.

Consideriamo la condizione più generale che in tutto la spazio S occupato dalla massa fluida, ad eccezione della superficie, ove si suppone $p = 0$, sia $p > 0$. Diremo (b) questa seconda condizione.

L'osservazione, oggetto della Nota, è la seguente: *che la condizione* (b) *non aggiunge niente alla condizione* (a); che, in altre parole, per tutte quelle superficie per cui è verificata la condizione (a), è verificata anche la (b). La condizione (a) è dunque necessaria *e sufficiente* affinchè σ possa rappresentare una figura d'equilibrio. Il quadrato della velocità angolare dovrà essere uguale a $2\alpha k\varrho$. E quei limiti superiori che, per determinati valori di k e ϱ, si possono assegnare ad ω, o nel caso generale. o per classi speciali di superficie (limiti che per solito vengono messi in rapporto colla condizione $\frac{\partial U}{\partial n_i} > 0$), non dipendono se non da limiti entro i quali è contenuta, nei diversi casi, la costante (di natura geometrica) α.

2. Poichè $U = k\varrho u$, ed $U_0 = k\varrho u_0$ (se u_0 denota il valore costante di u sopra σ), avremo:

$$p = k\varrho^2(u - u_0).$$

Dobbiamo dunque dimostrare che in tutti i punti situati nell'interno dello spazio S, *u è maggiore di* u_0.

Consideriamo sopra σ un punto P_0 tale che rispetto al piano normale all'asse della z, passante per P_0, la superficie σ si trovi tutta dalla stessa parte; e tale inoltre che, supponendo di aver assegnato all'asse delle z un verso positivo, la retta $P_0 z$, avendo la direzione e il verso dell'asse, sia rivolta verso la parte in cui si trova σ. Noi supporremo che la retta $P_0 z$ penetri nell'interno dello spazio S, come avverrà, per esempio, se σ ammette in P_0 un piano tangente determinato.

Nel punto P_0 l'attrazione sarà rivolta dalla parte di σ: sarà cioè $\frac{\partial v}{\partial z} > 0$. Ma per la (1) $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}$; quindi $\frac{\partial u}{\partial z} > 0$. Ora nel punto P_0 u è uguale ad u_0, dunque nell'interno dello spazio S, in cui penetra la retta $P_0 z$, dovranno esservi dei punti nei quali u è maggiore di u_0. E la funzione u avrà nello spazio S un valore massimo u' *maggiore di* u_0.

Sia τ una sfera di centro P, di raggio R, tutta contenuta nello spazio S. Essendo $\Delta^2 u = \Delta^2 v + 4\alpha = -4(\pi - \alpha)$, sussisterà la relazione (che si ottiene applicando il *teorema della media* di Gauss alla funzione *armonica* $u + \frac{2}{3}(\pi - \alpha)(r^2 - R^2)$, ove r denota la distanza di un punto qualunque dal centro P della sfera):

$$u(P) = \frac{1}{\tau}\int_\tau u\, d\tau + \tfrac{2}{3} R^2(\pi - \alpha).$$

Se ne deduce che non può essere $\pi - \alpha \leqq 0$: altrimenti sarebbe

$$u(P) \leqq \frac{1}{\tau}\int_\tau u\, d\tau,$$

mentre questa relazione non risulterà verificata se si suppone che P sia un punto in cui la funzione u abbia il valore massimo u', ma che almeno in una parte di τ, u sia diversa da u', quindi minore di u'.

Sarà pertanto $\pi - \alpha > 0$, ossia

$$\alpha < \pi.$$

E la formula (2) darà:

$$u(P) > \frac{1}{\tau}\int_\tau u\, d\tau.$$

Di qui vediamo che se u'' è il *minimo* valore di u nell'intero spazio S, non può essere $u = u''$ in nessun punto P situato nell'interno di S. Vale a dire: il minimo valore di u è il valore u_0 che u assume sulle superficie; e in nessun punto situato nell'interno di S u può essere uguale ad u_0, ma dovrà essere ovunque $u > 0$; c. v. d.

Rimane così provato che se la pressione è nulla in superficie, essa è positiva in tutti i punti situati nell'interno dello spazio S. Ciò avverrà a maggior ragione se la pressione ha, in una superficie, un valore (costante) positivo.

Dalla formula $\alpha < \pi$, che è verificata per qualunque superficie σ sulla quale si abbia $v + \alpha(x^2 + y^2) = \text{cost}$, deriva, per il quadrato della velocità angolare, il limite $2\pi k\varrho$ stabilito dal Poincaré (¹).

(¹) *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, pag. 11. Il dott. Crudeli ha poi dimostrato che se la superficie σ è convessa in ogni suo punto, deve essere $\omega^2 < \pi k\varrho$ $\left(\text{ossia } \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$: *Nuovo limite superiore delle velocità angolari dei fluidi omogenei*, ecc., Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1910, pag. 666.

3. Possiamo riassumere le cose dette, nel modo seguente:

O la condizione (a), per una data superficie σ e per un dato asse di rotazione, è verificata; e la superficie σ è una figura d'equilibrio, purchè la velocità angolare di rotazione sia uguale a $\sqrt{2\alpha k\varrho}$, e la pressione superficiale abbia un valore costante, nullo o positivo.

O la condizione (a) non è verificata; e l'equilibrio non può aver luogo per nessun valore della velocità di rotazione, e per nessun valore (costante) della pressione in superficie.

Non vi è dunque nessun caso in cui l'equilibrio non sussista quando la pressione in superficie è nulla, e sussista invece se la pressione stessa ha un valore sufficientemente grande.

Chimica. — *Sulla tribenzoina*. Nota del Corrisp. L. Balbiano [1].

Una Memoria di A. Lipp e P. Miller [2] pubblicata nell'Agosto passato, di cui ebbi notizia soltanto al principio di quest'anno dal sunto del Chem. Zentralblatt. [3], mi obbligò a ripetere alcune esperienze sulla formazione e saponificazione della tribenzoina delle quali rendo conto in questa breve Nota.

Nel 1902 in una Memoria *Sulla saponificazione della tribenzoina* [4] ho cercato di dimostrare che le deduzioni chimico-fisiche del Geitel [5] e quelle chimiche alle quali era pervenuto il Lewkowitsch [6] dall'aumento *del numero di acetile* nei grassi insaponificati, e le variazioni *del numero di Hener*, si potevano spiegare in altro modo senza ricorrere all'ipotesi della saponificazione graduale, come supponevano i due chimici sucitati.

Le esperienze, instituite allora, mi dimostrarono che nella saponificazione parziale della tribenzoina con una quantità minima di alcoolato sodico in presenza di alcool *assoluto* (*alcoolyse di Haller 1906*) si aveva glicerina, benzoato di etile e tribenzoina inalterata, e nella saponificazione in mezzo eterogeneo, cioè colla soluziono acquosa al 10 % di idrato sodico, si aveva benzoato sodico, glicerina e tribenzoina. D'altra parte l'eterificazione della glicerina mediante il cloruro di benzoile col processo del Baumann mi dava *esclusivamente* la tribenzoina solida, cristallizzata, quantunque le quan-

[1] Dal laboratorio di chimica organica del R. Politecnico di Torino.

[2] I., pr. *88* (1913), 361.

[3] C., (1913), II, 1560.

[4] G. (1902), 265; (1903) 312.

[5] I., pr. *55* (1897), 429.

[6] B., *33* (1900), 89.