ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Geologia. — *Lembi fossiliferi quaternarî e recenti osservati nella Sardegna meridionale dal prof. D. Lovisato.* Nota del Corrispondente A. Issel.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sull'operatore differenziale binario* S *di M. Pieri.* Nota di Matteo Bottasso, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. È noto [1] che, essendo α una omografia vettoriale, ed $\mathbf{u}$ un vettore funzione del punto P, l'omografia

$$\frac{d(\alpha\mathbf{u})}{dP}$$

non si sa attualmente esprimere mediante gli operatori differenziali, *non binari*, finora introdotti (*A. V. G.*, I, pp. 63-107) [2]. È per tale ragione

[1] Ved. C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*: I, *Transformations linéaires* (1912); II, *Applications à la mécanique et à la physique* (1913), Pavia, Mattei e C. In tutto il sèguito, questi due volumi verranno, per brevità, indicati con *A. V. G.*

[2] Anche del quadrato dell'operatore di Laplace per le omografie, cioè di $\varDelta^2\alpha$, è stata notata la mancanza (*A. V. G.*, I, pag. 105); esso però risulta, in sostanza, contenuto nella [7] di pag. 104 (*A. V. G.*, I). Sostituendo infatti in questa formula $\varDelta\alpha$ ad α, si ha (*A. V. G.*, pag. 104 [9], pag. 105 [19]):

$$\varDelta^2\alpha = \mathrm{K}\frac{d(\mathrm{grad}\,\varDelta\,\mathrm{K}\alpha)}{dP} - \mathrm{Rot}^2\varDelta\alpha = \mathrm{K}\frac{d(\mathrm{grad}\,\varDelta\,\mathrm{K}\alpha)}{dP} + \mathrm{Rot}^4\alpha$$

$$= \mathrm{K}\frac{d(\varDelta'\,\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha)}{dP} - \mathrm{Rot}\,\varDelta\,\mathrm{Rot}\,\alpha\,.$$

Da questa si deduce facilmente, se α si riduce ad un numero m, la nota formula (*A. V. G.*, I, pag. 105 [12]):

$$\varDelta^2 m = \mathrm{div}\,\varDelta'\,\mathrm{grad}\,m\,.$$

Invero, si ha (*A. V. G.*, I, pag. 105 [11], pag. 102 [2]):

$$\mathrm{Rot}\,m = \mathrm{grad}\,m\wedge\,,\quad \varDelta\,\mathrm{Rot}\,m = (\varDelta'\,\mathrm{grad}\,m)\wedge\,,$$

$$\mathrm{Rot}\,\varDelta\,\mathrm{Rot}\,m = -\,\mathrm{div}\,\varDelta'\,\mathrm{grad}\,m + \frac{d(\varDelta'\,\mathrm{grad}\,m)}{dP}\,;$$

e poichè è (*A. V. G.*, I, pag. 105 [11], pag. 102 [1]):

$$\varDelta'\,\mathrm{grad}\,m = \mathrm{grad}\,\varDelta m = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,m)\,,$$

la $\dfrac{d(\varDelta'\,\mathrm{grad}\,m)}{dP}$ è una dilatazione (*A. V. G.*, I, pag. 77 [3]), e, in conseguenza, l'ultima forma scritta per $\varDelta^2\alpha$ dà subito l'espressione di $\varDelta^2 m$.

che il compianto M. Pieri credè opportuno di introdurre l'operatore binario $S(\alpha, \mathbf{u})$, tale che:

$$(1) \qquad \frac{d(\alpha\mathbf{u})}{dP} = \alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP} + S(\alpha, \mathbf{u}),$$

cioè definito dall'eguaglianza (per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario):

$$(2) \qquad S(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{x} = \left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{x}\right)\mathbf{u},$$

e svilupparne le numerose e notevoli proprietà (*A. V. G.*, I, pp. 95-97; II, pag. 138).

Avendo io notato che fra queste formule manca quella che dà la coniugata di $S(\alpha, \mathbf{u})$, cioè la $KS(\alpha, \mathbf{u})$, in funzione di α (o di $K\alpha$), e di $\mathbf{u}$, mi son proposto di calcolarla: ma il calcolo svolto mi ha condotto appunto ad esprimere l'*operatore binario* $S(\alpha, \mathbf{u})$ mediante i già noti operatori differenziali *non binari*. Ciò non toglie, naturalmente, importanza all'operatore binario S, che, per le sue molteplici e semplici proprietà (fra queste, notevolissime: la seconda [7] a pag. 96 sull'espressione della derivata di un prodotto vettoriale, e la definizione di grad e Rot a pag. 150 di *A. V. G.*, I), deve essere ancora conservato; ma è pure importante il fatto che l'operatore S possa essere eliminato, poichè in molti casi i calcoli riescono più spediti.

Così, oltre ad esprimere con la (II), n. 3, la derivata di $\alpha\mathbf{u}$, indicata nella (1), senza l'operatore S, si è ottenuta l'espressione [(III), (IV), (V), nn. 4, 6, 8] della derivata sia del prodotto di quante si vogliano omografie, sia di una arbitraria potenza, intera e positiva, d'una omografia; considerando, in particolare, il caso in cui le date omografie sono delle derivate.

2. Sviluppo il calcolo tal quale come mi si è presentato.

Essendo $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ due vettori costanti, dalla definizione (2) di S si ha:

$$S(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{a}\right)\mathbf{u}\times\mathbf{b},$$

e, per il teorema di commutazione (*A. V. G.*, I, pag. 32; pag. 67 [4], pag. 69 [1'']):

$$\mathbf{a}\times KS(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{b} = \mathbf{u}\times\left(\frac{dK\alpha}{dP}\,\mathbf{a}\right)\mathbf{b} = \mathbf{u}\times\frac{d(K\alpha\mathbf{b})}{dP}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\times K\,\frac{d(K\alpha\mathbf{b})}{dP}\,\mathbf{u};$$

e, poichè $\mathbf{a}$ è arbitrario:

$$KS(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{b} = K\,\frac{d(K\alpha\mathbf{b})}{dP}\,\mathbf{u}.$$

Ricordando che (*A. V. G.*, I, pag. 25; pag 70 [1]):

$$K\beta = \beta - 2V\beta\wedge \quad , \quad 2V\,\frac{d\mathbf{v}}{dP} = \operatorname{rot}\mathbf{v},$$

ne segue:

$$KS(\alpha\,,\mathbf{u})\,\mathbf{b} = \frac{d(K\alpha\mathbf{b})}{dP}\,\mathbf{u} - \operatorname{rot}(K\alpha\mathbf{b})\wedge\mathbf{u}\,,$$

ossia (*A. V. G.*, I, pag. 69 [1″], pag. 74 [4]):

$$KS(\alpha\,,\mathbf{u})\,\mathbf{b} = \left(\frac{dK\alpha}{dP}\,\mathbf{u}\right)\mathbf{b} + \mathbf{u}\wedge(\operatorname{Rot}K\alpha)\,\mathbf{b}\,;$$

e siccome questa vale per $\mathbf{b}$ arbitrario, si ha:

$$KS(\alpha\,,\mathbf{u}) = \frac{dK\alpha}{dP}\,\mathbf{u} + \mathbf{u}\wedge\operatorname{Rot}K\alpha\,,$$

da cui, operando con K nei due membri (*A. V. G.*, I, pag. 67 [4]):

$$\text{(I)} \qquad S(\alpha\,,\mathbf{u}) = \frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{u} - K\operatorname{Rot}K\alpha\,.\,\mathbf{u}\wedge\,.$$

Osservazione. — Questa formula si può anche dedurre facilmente dalla [4] di pag. 74 (*A. V. G.*, I), cioè dalla:

$$K\operatorname{Rot}K\alpha(\mathbf{u}\wedge\mathbf{x}) = \left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{u}\right)\mathbf{x} - \left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{x}\right)\mathbf{u}.$$

Basta osservare che il secondo termine del secondo membro di questa eguaglianza, per la (2), è $S(\alpha\,,\mathbf{u})\,\mathbf{x}$, per ottenere subito la (I), poichè $\mathbf{x}$ è un vettore arbitrario.

3. La (I) permette ora di mettere subito la (1) sotto la forma:

$$\text{(II)} \qquad \frac{d(\alpha\mathbf{u})}{dP} = \alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{dP} + \frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{u} - K\operatorname{Rot}K\alpha\,.\,\mathbf{u}\wedge\,.$$

Questa ci mostra che, *per il prodotto funzionale* $\alpha\mathbf{u}$, *non vale (in generale) la ordinaria regola di derivazione del prodotto di funzioni numeriche*; poichè all'espressione che ne risulterobbe per la derivata del primo membro, eseguita applicando la legge indicata, *occorre aggiungere un terzo termine*, come è indicato nel secondo membro della (II).

Questo secondo membro si riduce, come è noto (*A. V. G.*, I, pag. 130), ai soli due primi termini *quando* α *è una derivata* (e solo allora); il che subito risulta anche dalla nostra (II). Invero, perchè si verifichi la condizione indicata, occorre e basta sia:

$$K\operatorname{Rot}K\alpha\,.\,\mathbf{u}\wedge = 0\,;$$

e siccome $\mathbf{u}$ è arbitrario, scegliendo opportunamente $\mathbf{x}$, il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$ può identificarsi con qualsivoglia vettore dello spazio; perciò la condizione scritta equivale alla:

$$\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha = 0\,, \quad \text{ossia:} \quad \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha = 0\,,$$

la quale è appunto (*A. V. G.*, I, pag. 118) la condizione necessaria e sufficiente perchè α sia una derivata.

Derivata del prodotto di due o più omografie.

4. Se nella (II) si pone $\mathbf{u} = \beta\mathbf{a}$, essendo β una seconda omografia ed $\mathbf{a}$ un vettore costante, si ha:

$$\frac{d(\alpha\beta\mathbf{a})}{d\mathrm{P}} = \alpha\frac{d(\beta\mathbf{a})}{d\mathrm{P}} + \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\beta\mathbf{a} - \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\,.\,(\beta\mathbf{a})\wedge\,. \tag{3}$$

Se introduciamo ora, con il Burali-Forti [1], l'operatore $\mathbf{A}$ (*assiale*), simbolo iperomografico il cui campo d'applicazione è formato dai vettori, se cioè poniamo:

$$\mathbf{a}\wedge = \mathbf{A}\mathbf{a}\quad,\quad (\beta\mathbf{a})\wedge = \mathbf{A}(\beta\mathbf{a}) = \mathbf{A}\beta\mathbf{a}\,, \tag{4}$$

[essendo priva di significato l'espressione $(\mathbf{A}\beta)\mathbf{a}$], applicando la (II), si ha:

$$\frac{d(\alpha\beta\mathbf{a})}{d\mathrm{P}} = \frac{d(\alpha\beta)}{d\mathrm{P}}\mathbf{a} - \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}(\alpha\beta)\,.\,\mathbf{a}\wedge = \frac{d(\alpha\beta)}{d\mathrm{P}}\mathbf{a} - \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}(\alpha\beta)\,.\,\mathbf{A}\mathbf{a}\,,$$

$$\alpha\frac{d\beta\mathbf{a}}{d\mathrm{P}} = \alpha\left[\frac{d\beta}{d\mathrm{P}}\mathbf{a} - \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\beta\,.\,\mathbf{a}\wedge\right] = \alpha\frac{d\beta}{d\mathrm{P}}\mathbf{a} - \alpha\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\beta\,.\,\mathbf{A}\mathbf{a}\,;$$

ed allora dalle (3) e (4) segue subito:

$$\begin{aligned}\frac{d(\alpha\beta)}{d\mathrm{P}} = \alpha\frac{d\beta}{d\mathrm{P}} + \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\beta + \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}(\alpha\beta)\,.\,\mathbf{A}\, - \\ - \alpha\,.\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\beta\,.\,\mathbf{A} - \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\,.\,\mathbf{A}\beta\end{aligned} \text{ [2]}. \tag{III}$$

Se α e β sono derivate, cioè (cfr. n. 3) $\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha = 0$, $\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\beta = 0$, si ha:

$$\frac{d(\alpha\beta)}{d\mathrm{P}} = \alpha\frac{d\beta}{d\mathrm{P}} + \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\beta + \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}(\alpha\beta)\,.\,\mathbf{A}\,; \tag{III'}$$

[1] C. Burali-Forti. *Sopra alcuni operatori lineari vettoriali*, Atti del R. Istituto Veneto, tom. LXXII, parte seconda, 1912-1913, pp. 265-276.

[2] In certi casi, per il prodotto funzionale può essere necessario — a scanso di dannose ambiguità — il segno ○. Cfr., per questo, C. Burali-Forti, *Sopra alcuni operatori* ecc., cit.

e se anche il prodotto $\alpha\beta$ *è una derivata*, si ottiene:

$$\text{(III'')} \qquad \frac{d(\alpha\beta)}{dP} = \alpha \frac{d\beta}{dP} + \frac{d\alpha}{dP}\beta ;$$

la quale formula, supposto che α, β siano delle derivate, vale quando, e soltanto quando [come mostra la (III')], anche $\alpha\beta$ è una derivata.

Sarebbe quindi interessante di vedere la condizione a cui debbono soddisfare le omografie α, β perchè, essendo esse derivate, sia pure $\alpha\beta$ una derivata.

5. Una delle forme sotto la quale può esprimersi detta condizione è la seguente:

In virtù di una formula ottenuta dal Pensa [1], cioè dalla:

$$2V\left(\alpha K \frac{d\beta \mathbf{a}}{dP}\right) = [\mathrm{Rot}(\alpha\beta) - \mathrm{Rot}\,\alpha\,.\,\beta - \mathrm{CK}\alpha\,.\,\mathrm{Rot}\,\beta]\,\mathbf{a},$$

la quale può sciversi:

$$2V\left(K\beta K \frac{dK\alpha \mathbf{a}}{dP}\right) = \mathrm{Rot}\,K(\alpha\beta) - \mathrm{Rot}\,K\beta\,.\,K\alpha - C\beta\,.\,\mathrm{Rot}\,K\alpha]\,\mathbf{a},$$

ove $\mathbf{a}$ è un vettore costante, perchè si abbia: $\mathrm{Rot}\,K(\alpha\beta) = \mathrm{Rot}(K\beta\,K\alpha) = 0$, quando si supponga essere $\mathrm{Rot}\,K\alpha = 0$, $\mathrm{Rot}\,K\beta = 0$, occorre e basta risulti:

$$V\left(K\beta K \frac{dK\alpha \mathbf{a}}{dP}\right) = 0,$$

od anche:

$$V\left(\frac{dK\alpha \mathbf{a}}{dP}\beta\right) = 0,$$

qualunque sia il vettore costante $\mathbf{a}$.

In altri termini: *Se* α *e* β *sono derivate, il prodotto* $\alpha\beta$ *risulterà pure una derivata quando e solo quando l'omografia:*

$$K\beta K \frac{dK\alpha \mathbf{a}}{dP}, \quad \textit{ovvero la} \quad \frac{dK\alpha \mathbf{a}}{dP}\beta,$$

sia una dilatazione, qualunque sia il vettore costante $\mathbf{a}$.

6. La (III) può estendersi facilmente al prodotto di un numero qualunque di omografie; e si ha che:

[1] A. Pensa, *Sopra alcuni operatori differenziali omografici*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, tomo XLVIII, 1912-13, pp. 149-155; pag. 150 (6).

Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *sono delle omografie funzioni del punto* P, *vale la relazione*:

$$\text{(IV)}\qquad \frac{d(\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_n)}{dP}=\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\frac{d\alpha_n}{dP}+\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_{n-2}\frac{d\alpha_{n-1}}{dP}\alpha_n+\cdots$$
$$\cdots+\frac{d\alpha_1}{dP}\alpha_2\dots\alpha_n+\mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_n)\,.\,\mathrm{A}\,-$$
$$-\,\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\,.\,\mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_n\,.\,\mathrm{A}-\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_{n-2}\,.\,\mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_{n-1}\,.\,\mathrm{A}\alpha_n\,-$$
$$-\,\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_{n-3}\,\mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_{n-2}\,.\,\mathrm{A}\alpha_{n-1}\,\alpha_n-\cdots-\mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_1\,.\,\mathrm{A}\alpha_2\dots\alpha_n\,.$$

Questa formula si dimostra senza difficoltà per induzione. Supposto infatti sia vera per un certo valore intero e positivo m, di n, sostituiamo in essa, ad α_m (per $n=m$), il prodotto $\alpha_m\,\alpha_{m+1}$; applicando la (III), si ottiene:

$$\frac{d(\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_m\,\alpha_{m+1})}{dP}=\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_{m-1}\Big[\alpha_m\frac{d\alpha_{m+1}}{dP}+\frac{d\alpha_m}{dP}\alpha_{m+1}+$$
$$+\,\mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha_m\,\alpha_{m+1})\,.\,\mathrm{A}-\alpha_m\,\mathrm{K\,Rot\,K}\alpha_{m+1}\,.\,\mathrm{A}-\mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_m\,.\,\mathrm{A}\alpha_{m+1}\Big]+$$
$$+\,\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_{m-2}\frac{d\alpha_{m-1}}{dP}\alpha_m\,\alpha_{m+1}+\cdots+\frac{d\alpha_1}{dP}\alpha_2\dots\alpha_m\,\alpha_{m+}\,+$$
$$+\,\mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_{m+1})\,.\,\mathrm{A}-\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_{m-1}\,\mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha_m\,\alpha_{m+1})\,.\,\mathrm{A}\,-$$
$$-\,\alpha_1\dots\alpha_{m-2}\,\mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_{m-1}\,.\,\mathrm{A}\alpha_m\,\alpha_{m+1}-\cdots-\mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_1\,.\,\mathrm{A}\,\alpha_2\,\alpha_3\dots\alpha_{m+1}\,,$$

nella quale si elidono i termini in $\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_{m-1}\,\mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha_m\,\alpha_{m+1})\,.\,\mathrm{A}$; dopo ciò, risulta provato che la (IV) vale pure per $n=m+1$. E siccome essa coincide con la (III) per $n=2$, si conclude che essa vale per ogni valore intero e positivo di n, cioè è vera in ogni caso.

7. Come nel n. 4, possiamo osservare che, *se le omografie* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *sono delle derivate, allora: quando, e solo quando, è pure una derivata il loro prodotto* $\alpha_1\,\alpha_2, \dots, \alpha_n$, si ha:

$$\text{(IV}'\text{)}\qquad \frac{d(\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_n)}{dP}=\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\frac{d\alpha_n}{dP}+\cdots+\alpha_1\frac{d\alpha_2}{dP}\alpha_3\dots\alpha_n+$$
$$+\frac{d\alpha_1}{dP}\alpha_2\,\alpha_3\dots\alpha_n\,;$$

e mi sembra degno di nota il fatto che, fra le condizioni ora indicate come sufficienti perchè valga la (IV′), non compaiono affatto i prodotti formati con una parte soltanto delle n omografie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Similmente a quanto si è fatto nel n. 5, dalla formula (2) del Pensa (loc. cit., pag. 150):

$$2\mathrm{V}\left(\alpha\,\frac{d\beta\mathrm{a}}{dP}\right)=[\mathrm{Rot}(\alpha\beta)-\mathrm{Rot}\,\alpha\,.\,\beta]\,\mathrm{a}\,,$$

per **a** vettore costante, si deduce:

$$2V\left[K\alpha_n \frac{dK(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_{n-1})\,\mathbf{a}}{dP}\right] =$$

$$= [\mathrm{Rot}\,K(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_n) - \mathrm{Rot}\,K\alpha_n \,.\, K(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_n)]\,\mathbf{a}\,;$$

quindi, essendo $\mathrm{Rot}\,K\alpha_n = 0$, affinchè risulti pure $\mathrm{Rot}\,K(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_n) = 0$, orcorre e basta che l'omografia $K\alpha_n \dfrac{dK(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_{n-1})\,\mathbf{a}}{dP}$ sia una dilatazione, qualunque sia il vettore costante **a**.

Dunque: *se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono delle derivate, la* (IV′) *sussiste quando e solo quando l'omografia*:

$$K\alpha_n \frac{dK(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_{n-1})\,\mathbf{a}}{dP},$$

per **a** *vettore costante arbitrario, è una dilatazione.*

8. Dalla (IV), in particolare, si ricava quale *espressione della derivata di una qualsivoglia potenza intera e positiva n-esima d'una omografia:*

$$\text{(V)}\quad \frac{d\alpha^n}{dP} = \alpha^{n-1}\frac{d\alpha}{dP} + \alpha^{n-2}\frac{d\alpha}{dP}\alpha + \cdots + \alpha\frac{d\alpha}{dP}\alpha^{n-2} + \frac{d\alpha}{dP}\alpha^{n-1} +$$
$$+ K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha^n \,.\, A - \alpha^{n-1} K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha \,.\, A -$$
$$- \alpha^{n-2} K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha \,.\, A\alpha - \cdots - K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha \,.\, A\alpha^{n-1}\,;$$

la quale, *quando α è una derivata*, si riduce a:

$$\text{(V′)}\quad \frac{d\alpha^n}{dP} = \alpha^{n-1}\frac{d\alpha}{dP} + \alpha^{n-2}\frac{d\alpha}{dP}\alpha + \cdots + \alpha\frac{d\alpha}{dP}\alpha^{n-2} +$$
$$+ \frac{d\alpha}{dP}\alpha^{n-1} + K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha^n \,.\, A\,;$$

e, *se anche α^n è una derivata*, si ha:

$$\text{(V″)}\quad \frac{d\alpha^n}{dP} = \alpha^{n-1}\frac{d\alpha}{dP} + \alpha^{n-2}\frac{d\alpha}{dP}\alpha + \cdots + \alpha\frac{d\alpha}{dP}\alpha^{n-2} + \frac{d\alpha}{dP}\alpha^{n-1}\,.$$

Per quanto si è detto nel n. 7, *se α è una derivata la* (V″) *sussiste quando e solo quando* $K\alpha \dfrac{dK\alpha^{n-1}\mathbf{a}}{dP}$ *è una dilatazione, qualunque sia il vettore costante* **a**.