ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Geometria. — *Sopra una questione di geometria cinematica.* Nota di Mauro Picone, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

1. Una curva C_1 si dice *trasformata asintotica* di un'altra curva C, quando quella e questa sono asintotiche curvilinee di una medesima superficie rigata. Nella trasformazione si fa corrispondere ad ogni punto M di C il punto M_1 di C_1 che si trova sulla generatrice passante per M (1).

Il problema della costruzione di tutte le trasformate asintotiche C_1 di una curva C si risolve con quadrature. Vi si giunge per parecchie vie, e in una Memoria in corso di stampa (2), ho seguito quella che qui riassumo: Designamo con x, y, z le coordinate del punto M di C, in funzione dell'arco v della curva, con

$$\alpha, \beta, \gamma \quad ; \quad \xi, \eta, \zeta \quad ; \quad \lambda, \mu, \nu,$$

i coseni direttori, rispettivamente, della tangente, della normale principale, della binormale, con $\frac{1}{\varrho}$ e $\frac{1}{T}$ la flessione e la torsione della curva e con le medesime lettere, munite dell'indice 1, gli elementi corrispondenti per la curva trasformata C_1. Indichiamo con $\theta(v)$ la funzione dell'arco v di C che misura l'angolo di inclinazione del raggio MM_1 sulla tangente alla C in M, con $t(v)$ la lunghezza del tratto MM_1, con $\sigma(v)$ l'angolo (fra 0 e π) delle binormali in M e in M_1 alle due curve C e C_1. Si ha il teorema (cfr. la mia citata Memoria):

Se θ, t, σ sono tali funzioni dell'arco v di C da soddisfare alle equazioni:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{\varrho} = \left(\frac{T}{t} + \cot\sigma\right)\frac{\cos\theta}{T}\,,\\ &\frac{d\cot\sigma}{dv} + \frac{T}{t}\frac{d\log t}{dv} = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma} - \frac{T^2}{t^2}\right)\frac{\cos\theta}{T}\,,\end{aligned}\right.$$

le formole

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x + t(\alpha\cos\theta + \xi\operatorname{sen}\theta)\,,\\ y_1 &= y + t(\beta\cos\theta + \eta\operatorname{sen}\theta)\,,\\ z_1 &= z + t(\gamma\cos\theta + \zeta\operatorname{sen}\theta)\,,\end{aligned}\right.$$

(1) Bianchi, *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie*, Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, tom. XXV, 1° sem., 1908.

(2) Picone, *Intorno alle trasformazioni asintotiche delle curve e complementi alla Memoria: Sulle congruenze rettilinee* W [in corso di stampa nei Rendic. del Circolo Matematico di Palermo].

rappresentano le coordinate del punto M_1, *corrispondente al punto* M *di* C, *nella più generale trasformazione asintotica di* C.

Di questo teorema ho fatto diverse applicazioni nella Memoria citata; in questa breve Nota mi permetto di mostrare come esso fornisca la completa risoluzione della seguente questione di *geometria cinematica*:

Determinare tutti i movimenti di una retta in cui la traiettoria di ogni punto è un'asintotica sulla rigata generata della retta.

La questione può trattarsi per altre vie, specialmente quando si pensi ch'essa può anche così formularsi:

Costruire tutte le superficie rigate (*le diremo rigate* R) *sulle quali le punteggiate proiettive, secondo cui le asintotiche curvilinee segano le generatrici, risultano identiche.*

La trattazione che vado ad esporre ha il merito di una grandissima semplicità nei calcoli.

2. Alla classe delle rigate R, le cui asintotiche segano le generatrici in punteggiate identiche, appartiene l'*elicoide rigata d'area minima*. Vedremo che l'elicoide rigata d'area minima fornisce un esempio particolarissimo di tali rigate, nonostante possiamo fin da ora rilevare una proprietà comune a tutte, è la seguente:

Le rigate R *sono a piano direttore.*

Ed infatti la linea nel piano all'infinito di ogni rigata R deve risultare un'asintotica, e perciò sarà una retta.

3. Per la trattazione analitica del nostro problema, domandiamoci, come prima cosa, se esistono trasformazioni asintotiche per una curva C nelle quali il tratto $MM_1 = t(v)$, congiungente due punti corrispondenti, ha lunghezza costante $= u$. Ponendo $t = u$ nelle (1), si vede che θ e σ devono soddisfare al seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{\varrho} = \left(\frac{\mathrm{T}}{u} + \cot\sigma\right)\frac{\operatorname{sen}\theta}{\mathrm{T}}, \\ &\frac{d\cot\sigma}{dv} = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma} - \frac{\mathrm{T}^2}{u^2}\right)\frac{\cos\theta}{\mathrm{T}}. \end{aligned}\right.$$

Ne segue che: *Per ogni curva* C *esistono* ∞^3 *sue trasformate asintotiche tali che la distanza fra due punti corrispondenti è costante; ciascuna trasformata risulta individuata coll'assegnarle, sopra un determinato piano, osculante in* M *la* C, *un punto* M_1 *per cui deve passare, e un piano per* MM_1 *dal quale deve essere osculata.*

Se consideriamo ora una rigata R, le sue asintotiche sono trasformate asintotiche di una fissata C fra esse, tali che la distanza fra due punti corrispondenti è costante. Designamo con C_u l'asintotica di R che stacca sulle generatrici, a partire dai punti di C, un segmento di lunghezza u. Le funzioni θ e σ relative alla coppia C e C_u di trasformate asintotiche devono soddisfare al sistema (3), ne segue l'esistenza di due soluzioni θ e σ del detto sistema *di cui la prima non dipende da* u. Se pertanto con $\tau(v)$ indichiamo una funzione della sola v, dovremo avere

$$\frac{\mathrm{T}}{u} + \cot\sigma = \tau(v)\,, \tag{4}$$

e quindi, se si tien conto della seconda delle (3),

$$\frac{\partial \cot\sigma}{\partial u} = \frac{\mathrm{T}}{u^2}\,,$$

$$\frac{\partial \cot\sigma}{\partial v} = \left(1 + \cot^2\sigma - \frac{\mathrm{T}^2}{u^2}\right)\frac{\cos\theta}{\mathrm{T}}\,.$$

Eguagliando le due espressioni che queste equazioni forniscono per $\dfrac{\partial^2 \cot\sigma}{\partial u\,\partial v}$, si ottiene

$$\frac{d\mathrm{T}}{dv} = 2\tau\cos\theta\,. \tag{5}$$

Se infine scriviamo che il valore di $\cot\sigma$ fornito dalla (4) soddisfa alla seconda equazione delle (3), si ricava, tenendo conto della (5),

$$\frac{d\tau}{dv} = (1+\tau^2)\,\frac{\cos\theta}{\mathrm{T}}\,.$$

Troviamo dunque che la torsione e la flessione della C devono essere tali funzioni dell'arco v, che esistano *due* funzioni τ e θ di v verificanti le *tre* equazioni:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathrm{T}}{dv} = 2\tau\cos\theta\,, && 1^{\mathrm{a}}\\ &\frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{\varrho} = \tau\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\mathrm{T}}\,, && 2^{\mathrm{a}}\\ &\frac{d\tau}{dv} = (1+\tau^2)\,\frac{\cos\theta}{\mathrm{T}}\,. && 3^{\mathrm{a}}\end{aligned}\right.$$

E viceversa, riesce evidente che se una curva C possiede l'indicata particolarità, la rigata che si ottiene conducendo per ogni punto di C e nel relativo piano osculatore un raggio inclinato sulla tangente di un angolo misurato dalla funzione $\theta(v)$, soddisfacente, colla $\tau(v)$, alle (5), è la più generale rigata R.

Per la costruzione delle curve C, asintotiche di una rigata R, procediamo al modo seguente. Osserviamo che dalla 1^{a} e dalla 3^{a} delle (5) si ricava

$$\frac{2\tau}{1+\tau^2}\,\frac{d\tau}{dv} = \frac{1}{\mathrm{T}}\,\frac{d\mathrm{T}}{dv}\,,$$

e quindi, designando con a una costante arbitraria,

$$\mathrm{T} = a(1 + \tau^2)\,. \tag{6}$$

Ad una curva C si può dunque asseguare ad arbitrio la flessione $\frac{1}{\varrho}$ in funzione dell'arco v; la torsione sarà poi fornita dalla (6), dove $\tau(v)$ si ricava dall'integrazione del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle *due* funzioni incognite θ e τ:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\tau}{dv} &= \frac{\cos\theta}{a}, \\ \frac{d\theta}{dv} &= -\frac{1}{\varrho} + \frac{\tau \operatorname{sen}\theta}{a(1+\tau^2)}\,. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Meglio conviene però enunciare il risultato a cui siamo giunti nella forma seguente:

La torsione e la flessione, in funzione dell'arco v, di un'asintotica C *per la piu generale rifiata* R, *sono definiti dalle seguenti eguaglianze*:

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{a(1+\tau^2)} \quad , \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\tau \operatorname{sen}\theta}{a(1+\tau^2)} - \frac{d\theta}{dv}, \tag{8}$$

dove θ è una funzione di v assegnata arbitrariamente, esprimente l'angolo secondo cui la C *taglia le generatrici della rigata* R, *a è una costante arbitraria, e τ si ricava con una quadratura dall'equazione*

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{\cos\theta}{a}.$$

Costruita la curva C, *siano* $x = \bar{x}(v)$, $y = \bar{y}(v)$, $z = \bar{z}(v)$ *le sue equazioni, le equazioni della rigata* R *che possiede questa curva fra le sue asintotiche, sono*

$$\left\{\begin{aligned} x &= \bar{x}(v) + u(\alpha\cos\theta + \xi \operatorname{sen}\theta), \\ y &= \bar{y}(v) + u(\beta\cos\theta + \eta \operatorname{sen}\theta), \\ z &= \bar{z}(v) + u(\gamma\cos\theta + \zeta \operatorname{sen}\theta), \end{aligned}\right. \tag{9}$$

ove u e v designano i parametri delle asintotiche.

Già sappiamo che ogni rigata R è a piano direttore. Lo possiamo verificare analiticamente, calcolando il wronsckiano delle *tre* funzioni di v:

$$\alpha\cos\theta + \xi \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \beta\cos\theta + \eta \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \gamma\cos\theta + \zeta \operatorname{sen}\theta\,,$$

si trova, con un facile calcolo, tenendo presente le equazioni (5), ch'esso è identicamente nullo. Segue l'esistenza di tre determinati e costanti coseni direttori l, m, n pei quali è identicamente

$$(10)\qquad l(\alpha\cos\theta+\xi\,\mathrm{sen}\,\theta)+m(\beta\cos\theta+\eta\,\mathrm{sen}\,\theta)+ \\ +n(\gamma\cos\theta+\zeta\,\mathrm{sen}\,\theta)=0.$$

Per individuare la giacitura del piano direttore della rigata R, calcoliamo i coseni direttori della direzione fissa (l, m, n) rispetto al triedro mobile determinato dalla tangente, dalla normale principale e dalla binormale alla C. A tale scopo disponiamo la rigata R in modo che il suo piano direttore sia il piano (x, y), la (10) ci darà

$$(11)\qquad \cot\theta=-\frac{\zeta}{\gamma},$$

mentre γ, ζ, ν rappresenteranno i coseni direttori ultimamente menzionati. Dalla (11), se si tien conto della seconda delle (5), si trae

$$-\frac{\nu\gamma}{\gamma^2+\zeta^2}=\tau\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

e quindi, poichè $\zeta=-\gamma\cot\theta$,

$$\nu=-\frac{\tau\gamma}{\mathrm{sen}\,\theta},$$

ne segue

$$\gamma=\varepsilon\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{1+\tau^2}}\ ,\quad \zeta=-\varepsilon\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\tau^2}}\ ,\quad \nu=-\varepsilon\frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

ove $\varepsilon=\pm1$. Si ha pertanto che i coseni direttori l, m, n della direzione fissa, alla quale le generatrici della rigata R si mantengono normali, sono

$$(12)\qquad \begin{cases} l=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+\tau^2}}(\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta-\xi\cos\theta-\lambda\tau), \\ m=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+\tau^2}}(\beta\,\mathrm{sen}\,\theta-\eta\cos\theta-\mu\tau), \\ n=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+\tau^2}}(\gamma\,\mathrm{sen}\,\theta-\zeta\cos\theta-\nu\tau). \end{cases}$$

Si verifica subito, tenendo conto delle (5), che l, m, n sono costanti.

I risultati della precedente breve ricerca conducono dunque al seguente teorema di geometria cinematica:

Si costruisca una curva C *per la quale la torsione e la flessione, in funzione dell'arco v, siano date dalle eguaglianze*:

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{a(1+\tau^2)}\ ,\quad \frac{1}{\varrho}=\frac{\tau\,\mathrm{sen}\,\theta}{a(1+\tau^2)}-\frac{d\theta}{dv},$$

dove θ è una funzione arbitraria di v, a è una costante arbitraria e τ si ricava dall'equazione

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{\cos\theta}{a};$$

i coseni direttori l, m, n forniti dalle (12) *risulteranno costanti. Si imprima ora ad un piano π un movimento traslatorio nel quale mantenga la giacitura normale alla direzione l, m, n, ed un suo punto* M *descriva la curva* C; *la retta comune al piano π e al piano osculatore in* M *alla* C *si muoverà secondo il più generale movimento in cui ogni punto descrive un'asintotica della rigata generata della retta.*

4. Notevolmente semplice è la generazione del movimento della retta, quando ad un suo punto M si assegni una traiettoria rettilinea. Bisognerà allora integrare il seguente sistema di equazioni

$$(7') \quad \begin{cases} \dfrac{d\tau}{dv} = \dfrac{\cos\theta}{a}, \\[2ex] \dfrac{d\theta}{dv} = \dfrac{\tau \operatorname{sen}\theta}{a(1+\tau^2)}, \end{cases}$$

che si deduce dal sistema (7), per $\frac{1}{\varrho} = 0$. Segue dalle (7'):

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\theta}\frac{d\theta}{dv} = \frac{\tau}{1+\tau^2}\frac{d\tau}{dv},$$

e quindi, se b designa una seconda costante arbitraria,

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} b \,.\, \sqrt{1+\tau^2}\,.$$

Dalla prima delle (7') seguirà

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{\varepsilon}{a}\sqrt{\cos^2 b - \tau^2 \operatorname{sen}^2 b} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

d'onde

$$\tau = \cot b \,.\, \operatorname{sen}\left\{\varepsilon \frac{\operatorname{sen} b}{a}(v-c)\right\}.$$

Possiamo supporre $c = 0$, e indicare con k la costante $\varepsilon \frac{\operatorname{sen} b}{a}$, si avrà

$$\tau = \cot b \,.\, \operatorname{sen} kv\,,$$

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} b \,.\, \sqrt{1+\cot^2 b \operatorname{sen}^2 kv} \quad , \quad \cos\theta = \varepsilon \cos b \cos kv\,.$$

$$\mathrm{T} = \varepsilon \frac{\operatorname{sen} b}{k}(1+\cot^2 b \operatorname{sen}^2 kv)\,.$$

Se ora supponiamo che la traiettoria rettilinea C del punto M sia l'asse delle z, bisognerà porre nelle (9), $\overline{x} = \overline{y} = 0$, $\overline{z} = v$ e quindi $\alpha = \beta = = \zeta = \nu = 0$, $\gamma = 1$. Si hanno subito le espressioni di ξ, η; λ, μ e le equazioni della rigata R generata dalla retta mobile risulteranno

$$x = u \operatorname{sen} b \cos kv,$$

$$y = -u \operatorname{sen} kv,$$

$$z = v \pm u \cos b \cos kv.$$

La giacitura del piano direttore della R è normale alla direzione $\cos b$, o, $\mp \operatorname{sen} b$.

Concludiamo pertanto che:

Il più generale movimento di una retta m nel quale ogni punto descrive un'asintotica della rigata descritta dalla retta, colla condizione che la traiettoria di un suo punto M *sia una retta assegnata r si genera al modo seguente: Si consideri un piano per la retta mobile m, e ad esso si imprima un movimento traslatorio rettilineo, nella direzione della r, seco trascinando la retta m che contemporaneamente si muove nel piano di moto rotatorio attorno al punto* M *con una velocità in rapporto costante rispetto a quella di* M.

Meccanica. — *Caratterizzazione energetica dei moti soggetti a resistenza viscosa od idraulica.* Nota II di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Mantenendo le denominazioni adottate nella Nota I, poniamo

$$\sigma = \int_t^{t+\tau} \sqrt{\mathfrak{T}}\, dt$$

$$\mathfrak{A} = \int_t^{t+\tau} \mathfrak{T}\, dt,$$

cioè rappresentiamo con σ il valore dell'arco di traiettoria percorso da S nell'intervallo $(t, t+\tau)$ e con $\mathfrak{A}$ il valore dell'azione delle forze attive su S relativo allo stesso intervallo. Dal risultato ottenuto in fine alla Nota I, segue, in particolare, che: Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema delle forze attive su S si riduca (a meno di un sistema di forze perpendicolare alla velocità) ad un sistema di forze derivante da una resistenza di mezzo per la quale (indicando con h, k, l delle costanti positive arbitrarie) la funzione caratteristica abbia la forma

$$f(\mathfrak{T}) = \begin{cases} h & \text{(resistenza viscosa)} \\ k\sqrt{\mathfrak{T}} & \text{(resistenza idraulica)} \\ l\mathfrak{T}\,, \end{cases}$$

è che $P_{t,\tau}$ risulti una funzione di $\begin{cases} \tau \\ \sigma \\ \mathfrak{a} \end{cases}$ solamente, positiva per $\begin{cases} \tau \\ \sigma \\ \mathfrak{a} \end{cases} > 0$.

Dal risultato medesimo segue che tutte le volte che il sistema di forze attive su S si riduca (sempre a meno di un sistema di forze perpendicolari all'atto di movimento) ad un sistema di forze derivante da una resistenza di mezzo di funzione caratteristica

$$f(\mathfrak{T}) = h + k\sqrt{\mathfrak{T}}$$

(cioè composta di una resistenza viscosa e di una resistenza idraulica), $P_{t,\tau}$ risulterà una funzione di τ e σ soltanto, positiva per τ e σ positivi. La proprietà inversa è pure vera, e si dimostra senza difficoltà osservando che, dall'essere

$$P_{t,\tau} = \varphi(\tau, \sigma),$$

segue

$$-\frac{1}{\mathfrak{T}_t}\frac{d\mathfrak{T}_{t+\tau}}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\sqrt{\mathfrak{T}_{t+\tau}}\,,$$

ed anche — indicati con h e k i valori positivi (¹) di $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{\tau=\sigma=0}$ e

(1) $$\frac{d}{dt}\log\mathfrak{T} = (h + k\sqrt{\mathfrak{T}}),$$

(¹) Che $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{\tau=\sigma=0}$ e $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)_{\tau=\sigma=0}$ sono necessariamente positivi, è immediata conseguenza

1°) della diseguaglianza

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{\tau=\sigma=0} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)_{\tau=\sigma=0}\sqrt{\mathfrak{T}} \geq 0$$

che, indipendentemente dal valore di $\mathfrak{T}$, deve essere verificata perchè si suppone $\varphi(\tau,\sigma)$ positiva per τ e σ positivi, mentre è

$$\varphi(0,0) = P_{t,0} = 0\,;$$

2°) della (1) che fa escludere che anche uno solo dei valori in questione possa essere nullo.

$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)_{\tau=\sigma=0}$ — :

e infine

$$P_{t,\tau} = 1 - e^{-\int_t^{t+\tau} (h + k\sqrt{\mathfrak{S}})\, dt}.$$

2. Sia P un punto materiale libero, $\mathbf{v}$ la sua velocità, $\mathbf{F}_T$ ed $\mathbf{F}_N$ i componenti tangenziale e normale della forza totale agente sopra di esso, δ la distanza delle sue posizioni all'inizio e al termine dell'intervallo di tempo qualunque $(t, t+\tau)$.

Avendo presenti le conclusioni della Nota I e più specialmente le loro conseguenze poste in evidenza al § 1, può sembrare anche superfluo di rilevare esplicitamente che, come abbiamo enunciato fin dal principio della Nota I, allora, e allora solamente, che sia

$$\mathbf{F}_T = -h\mathbf{v} \qquad \text{(resistenza viscosa)}$$

ovvero

$$\mathbf{F}_T = -kv\mathbf{v} \qquad \text{(resistenza idraulica)},$$

$P_{t,\tau}$ sarà una funzione di τ soltanto, ovvero di σ soltanto, positiva pei valori positivi del suo argomento.

Nel secondo caso, quando ulteriormente $\mathbf{F}_N$ sia tale [1] che la traiettoria

[1] È opportuno di rilevare, specialmente a giustificazione di quanto è asserito nella nota (6), che condizione necessaria e sufficiente affinchè la traiettoria di P sia un'elica circolare (in particolare un cerchio o una retta) è che sia

$$(\alpha) \qquad \mathbf{F}_N = v\mathbf{v} \wedge \mathbf{H},$$

$\mathbf{H}$ essendo un vettore costante non nullo parallelo all'asse del cilindro sede dell'elica.

La proprietà diretta risulta immediatamente dall'espressione generale di $\mathbf{F}_N$ in funzione di v e del raggio di curvatura della traiettoria. Per dimostrare poi la proprietà inversa, basterà che prendiamo in esame i moti delle proiezioni P_1, P_2 di P sopra un piano perpendicolare ad H e sopra una retta parallela ad H. Indicando con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ le velocità di P_1, P_2, se vale la (α), evidentemente sarà

$$(\beta) \qquad \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{F_T}{v}\mathbf{v}_1 + v\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{H}$$

$$(\gamma) \qquad \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{F_T}{v}\mathbf{v}_2,$$

donde si deduce [moltiplicando scalarmente (β) e (γ) per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$]

$$\frac{d}{dt}\log v_1^2 = \frac{F_T}{v} = \frac{d}{dt}\log v_2^2.$$

Ne segue

$$\frac{v_2}{v_1} = \text{cost},$$

ed anche

$$\frac{v_2}{v} = \text{cost}.$$

Ciò prova che $\mathbf{v}$ forma un angolo costante con H, e al tempo stesso (sempre in base di P risulti un'elica circolare (in particolare una circonferenza o una retta), $P_{t,\tau}$ si potrà considerare anche come una funzione di δ soltanto, positiva per $\delta > 0$.

Invero le eliche circolari godono la proprietà, sufficiente ad individuarle, che in esse, ad archi di lunghezza eguale, corrispondono corde eguali ([2]).

Si può domandare se non si presenti anche in altri casi la circostanza che $P_{t,\tau}$ risulti una funzione di δ soltanto, positiva per $\delta > 0$:

$$P_{t,\tau} = \psi(\delta) . \tag{2}$$

Alla conclusione che ciò non si verifica, facilmente si perviene nel modo seguente.

Derivando la (2) rispetto a τ, poichè δ è funzione di τ soltanto per il tramite di σ, si ottiene, qualunque sia τ,

$$-\frac{1}{\mathfrak{T}_t}\frac{d\mathfrak{T}_{t+\tau}}{dt} = \psi'(\delta)\frac{d\delta}{d\sigma}\sqrt{\mathfrak{T}_{t+\tau}}\,;$$

ed anche, per $\tau = 0$,

$$\frac{1}{\mathfrak{T}}\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = -\psi'(0)\sqrt{\mathfrak{T}}\,, \tag{3}$$

perchè, evidentemente,

$$\left(\frac{d\delta}{d\sigma}\right)_{\sigma=0} = 1 .$$

Indicando con k il valore positivo ([3]) di $\psi'(0)$ dalla (3) si deduce

$$P_{t,\tau} = 1 - e^{-k\sigma}, \tag{4}$$

all'espressione generale della componente normale della forza applicata ad un punto materiale in funzione della velocità e del raggio di curvatura della traiettoria) permette di dedurre dalla (β) che la flessione della traiettoria di P_1 (se non è identicamente $v_1 = 0$) è costante e $\neq 0$, così che la traiettoria stessa è una circonferenza (eventualmente degenere in un punto). La traiettoria di P sarà dunque un'elica di un cilindro circolare retto, avente l'asse parallelo al vettore **H**.

([1]) Le eliche circolari sono caratterizzate (cfr. ad es. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa, 1902) dall'essere in ogni parte sovrapponibili a sè stesse. In una elica cilindrica a due archi di eguale lunghezza, corrisponderanno dunque corde eguali. Viceversa, se in una curva si verifica questa proprietà, qualunque sia la lunghezza comune dei due archi considerati, risulterà possibile, fissati ad arbitrio due punti P′, P″ della curva, stabilire una corrispondenza della curva in sè, in cui i punti P′, P″ siano omologhi e che conservi le lunghezze degli archi e, al tempo stesso, le distanze. Vuol dire che in tale ipotesi la curva sarà necessariamente sovrapponibile a sè stessa in ogni sua parte, e quindi sarà un'elica circolare, c. d. d.

([3]) Cfr. la (3) della Nota I.

ciò che prova che, se vale la (2), il moto di P è dovuto all'azione di una forza perpendicolare alla velocità e di una resistenza idraulica. Di più, confrontando la (4) colla (2) [quando si tenga presente che è $\psi'(0) \neq 0$] si arriva (senza escludere che la ψ possa essere una funzione multiforme di δ) (1) alla conclusione che, sempre valendo la (2), nella traiettoria di P, a due archi di lunghezza eguale (almeno se tale comune lunghezza non è troppo grande), corrispondono corde eguali. Ciò basta (evidentemente) per potere asserire che la traiettoria di P è un'elica cilindrica.

Possiamo dunque concludere che l'essere $P_{t,\tau}$ una funzione di δ solamente, positiva per $\delta > 0$, caratterizza, tra i moti di P dovuti all'azione di una forza perpendicolare alla velocità, quelli che hanno per traiettoria un'elica circolare (in particolare, una circonferenza o una retta) (2).

Il risultato ottenuto si presta evidentemente ad essere esteso al caso di un sistema olonomo qualunque, in base alla già menzionata rappresentazione del moto di un tale sistema mediante il moto di un punto di un S_n: ma su ciò non insisteremo, non presentando la cosa un effettivo interesse.

Soltanto osserveremo che, se si considera un punto materiale P vincolato a restare sopra un piano fisso (e privo di attrito), le considerazioni ora svolte sono sufficienti a concludere che, l'essere $P_{t,\tau}$ funzione di δ (cioè, se si vuole, della distanza geodetica delle due posizioni occupate da P agli istanti t e $t+\tau$ sulla superficie che rappresenta il vincolo), caratterizza, tra i moti di P dovuti all'azione di una forza perpendicolare alla velocità e di una resistenza idraulica, quelli che hanno per traiettoria una circonferenza (in particolare una retta).

Matematica. — *Su una proposizione dell'Almansi.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Corrisp. E. ALMANSI.

Il prof. Almansi, in una Memoria *Sopra una delle esperienze di Plateau* (3) è stato condotto ad enunciare e a dimostrare la seguente proposizione:

Se $f(x)$: 1°) *è una funzione finita e continua insieme alla sua derivata $f'(x)$ in tutto l'intervallo (a, b);*

2°) *assume lo stesso valore negli estremi a e b;*

3°) *soddisfa all'uguaglianza* $\int_a^b f(x)\,dx = 0$;

(1) Ciò che necessariamente accadrà nel caso, effettivamente possibile, che la traiettoria di P sia una circonferenza.

(2) Ciò equivale a dire che l'essere $P_{t,\tau}$ una funzione di δ soltanto, positiva per $\delta > 0$, caratterizza i moti di P che si svolgono sotto l'azione di una resistenza idraulica e di una forza normale alla velocità del tipo $\mathbf{F}_N = v\mathbf{v}\,\Delta H$ [cfr. la nota (2)].

(3) Annali di Matematica, 1906.