ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ciò che prova che, se vale la (2), il moto di P è dovuto all'azione di una forza perpendicolare alla velocità e di una resistenza idraulica. Di più, confrontando la (4) colla (2) [quando si tenga presente che è $\psi'(0) \neq 0$ | si arriva (senza escludere che la ψ possa essere una funzione multiforme di δ) [1] alla conclusione che, sempre valendo la (2), nella traiettoria di P, a due archi di lunghezza eguale (almeno se tale comune lunghezza non è troppo grande), corrispondono corde eguali. Ciò basta (evidentemente) per potere asserire che la traiettoria di P è un'elica cilindrica.

Possiamo dunque concludere che l'essere $P_{t,\tau}$ una funzione di δ solamente, positiva per $\delta > 0$, caratterizza, tra i moti di P dovuti all'azione di una forza perpendicolare alla velocità, quelli che hanno per traiettoria un'elica circolare (in particolare, una circonferenza o una retta) [2].

Il risultato ottenuto si presta evidentemente ad essere esteso al caso di un sistema olonomo qualunque, in base alla già menzionata rappresentazione del moto di un tale sistema mediante il moto di un punto di un S_n: ma su ciò non insisteremo, non presentando la cosa un effettivo interesse.

Soltanto osserveremo che, se si considera un punto materiale P vincolato a restare sopra un piano fisso (e privo di attrito), le considerazioni ora svolte sono sufficienti a concludere che, l'essere $P_{t,\tau}$ funzione di δ (cioè, se si vuole, della distanza geodetica delle due posizioni occupate da P agli istanti t e $t+\tau$ sulla superficie che rappresenta il vincolo), caratterizza, tra i moti di P dovuti all'azione di una forza perpendicolare alla velocità e di una resistenza idraulica, quelli che hanno per traiettoria una circonferenza (in particolare una retta).

Matematica. — *Su una proposizione dell'Almansi.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Corrisp. E. ALMANSI.

Il prof. Almansi, in una Memoria *Sopra una delle esperienze di Plateau* [3] è stato condotto ad enunciare e a dimostrare la seguente proposizione:

Se $f(x)$: 1°) *è una funzione finita e continua insieme alla sua derivata $f'(x)$ in tutto l'intervallo (a, b);*

2°) *assume lo stesso valore negli estremi a e b;*

3°) *soddisfa all'uguaglianza* $\int_a^b f(x)\,dx = 0$;

[1] Ciò che necessariamente accadrà nel caso, effettivamente possibile, che la traiettoria di P sia una circonferenza.

[2] Ciò equivale a dire che l'essere $P_{t,\tau}$ una funzione di δ soltanto, positiva per $\delta > 0$, caratterizza i moti di P che si svolgono sotto l'azione di una resistenza idraulica e di una forza normale alla velocità del tipo $\mathbf{F}_N = v\mathbf{v}\,\Delta\mathrm{H}$ [cfr. la nota (2)].

[3] Annali di Matematica, 1906.

allora è anche

$$\int_a^b [f'(x)]^2\, dx \geq \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b [f(x)]^2\, dx \text{ » .}$$

La dimostrazione che ne dà il ch^mo^ Autore procede per gradi, comincia cioè a rivolgersi a funzioni che soddisfano a certe peculiari condizioni, che va poi via via allargando fino a giungere alla classe delle funzioni per cui il teorema stesso è enunciato.

In questa breve Nota, ci proponiamo di giungere direttamente alla proposizione detta nella sua forma più generale, enunciandola per la classe delle funzioni *assolutamente continue* (funzioni integrali), che è più estesa di quella considerata dall'Almansi, facendo anche vedere che, abbandonando l'*assoluta continuità*, si hanno funzioni per le quali la proposizione stessa non è più valida, pur essendo tali funzioni a *variazione limitata.*

Dimostriamo anzi quest'altro teorema, che contiene il precedente come caso particolare:

« *Se $f(x)$ è una funzione assolutamente continua nell'intervallo* (a, b) [1], *nei cui estremi assume lo stesso valore, e se esiste l'integrale* $\int_a^b [f'(x)]^2\, dx$, *è*

$$\int_a^b [f(x)]^2\, dx - \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2\, dx \leq \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(x)\, dx\right]^2 \text{ [2]}$$

Avvertiamo che noi, come l'Almansi, ci fondiamo sulla formula di Parseval, relativa alle serie di Fourier.

La Nota termina con una proposizione relativa al rapporto fra l'integrale di f^2 e quello di f'^2.

1. Facciamo un cambiamento di variabile mediante la posizione

$$x = a + \frac{b-a}{2\pi}\theta ,$$

che fa corrispondere all'intervallo (a, b), l'altro $(0, 2\pi)$. La funzione $f(x)$ viene così mutata in

$$f\left(a + \frac{b-a}{2\pi}\theta\right) = \mathrm{F}(\theta) ,$$

e questa $\mathrm{F}(\theta)$ risulterà ancora assolutamente continua, ed assumerà lo stesso

[1] $b > a$.

[2] Relativamente dai due termini della differenza qui considerata, si sa già che il loro rapporto è sempre ≤ 4, se è $f(a) = f(b) = 0$ (ved. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations,* Paris, Hermann, 1910, pag. 335).

valore negli estremi 0 e 2π. La disuguaglianza da dimostrare diventerà poi

$$\int_0^{2\pi}[F(\theta)]^2\,d\theta - \int_0^{2\pi}[F'(\theta)]^2\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}F(\theta)\,d\theta\right]^2 .$$

La funzione $F(\theta)$, essendo assolutamente continua è *a fortiori* continua e a variazione limitata. Il *criterio di Jordan* ci assicura allora (avendosi $F(0) = F(2\pi)$) che tale funzione è sviluppabile in serie di Fourier, uniformemente convergente in tutto $(0\,,2\pi)$:

$$F(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{\infty}(a_p \cos px + b_p \operatorname{sen} px) ,$$

Inoltre, sempre per l'assoluta continuità, esiste la dernata $F'(\theta)$ in tutto l'intervallo $(0\,,2\pi)$, ad eccezione di più di un insieme di misura nulla, ed è

$$\int_0^{\theta}F'(\theta)\,d\theta = F(\theta) - F(0).$$

Ricordando ancora l'uguaglianza $F(0) = F(2\pi)$, abbiamo [1] che la serie di Fourier della derivata $F'(\theta)$ si ottiene derivando termine a termine quella di $F(\theta)$. Possiamo scrivere così (adottando una notazione dovuta a Hurwitz)

$$F'(\theta) \sim \sum_{1}^{\infty} p(-a_p \operatorname{sen} px + b_p \cos px) .$$

Dalla formula di Parseval, estesa da Fatou [2] alle funzioni di quadrato integrabile, deduciamo allora,

$$\int_0^{2\pi}F^2(\theta)\,d\theta = \pi\left\{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty}(a_p^2 + b_p^2)\right\}$$

$$\int_0^{2\pi}[F'(\theta)]^2\,d\theta = \pi\left\{\sum_{p=1}^{\infty}p^2(a_p^2 + b_p^2)\right\} ,$$

$$\int_0^{2\pi}[F(\theta)]^2\,d\theta - \int_0^{2\pi}[F'(\theta)]^2\,d\theta \leq \frac{\pi}{2}a_0^2 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}F(\theta)\,d\theta\right]^2 ,$$

che è appunto quanto si voleva dimostrare. Si vede anche che il segno di uguaglianza sta solo quando sia

$$a_p = b_p = 0 \qquad (p = 2\,,3\,,...),$$

(1) H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonometriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1906, pag. 104.

(2) P. Fatou, *Séries trigonometriques de séries de Taylor*, Acta math., 1906.

vale a dire,

$$F(\theta)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos\theta+b_1\operatorname{sen}\theta$$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos\left(2\pi\frac{x-a}{b-a}\right)+b_1\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{x-a}{b-a}\right).$$

2. Consideriamo la funzione $f(x)$ definita nel modo seguente. Per ogni

$$x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots, \tag{1}$$

dove i numeratori $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono uguali a zero oppure a 2, si abbia

$$f(x)=\frac{1}{2}\left\{\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots\right\}.$$

Per definire $f(x)$ sui punti rimanenti dell'intervallo $(0, 1)$, facciamo così. Consideriamo l'insieme I dei punti di $(0, 1)$; dati dalla (1): questo insieme è *perfetto* e si ottiene asportando dall'intervallo detto tutti i punti *interni* agli intervalli:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{0}{3}+\frac{1}{3^2}, \frac{0}{3}+\frac{2}{3^3}\right), \quad \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}\right)$$

$$\left(\frac{0}{3}+\frac{0}{3^2}+\frac{1}{3^3}, \frac{0}{3}+\frac{0}{3^3}+\frac{2}{3^3}\right), \quad \left(\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}, \frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}\right),$$

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{0}{3^2}+\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3}+\frac{0}{3^2}+\frac{2}{3^3}\right), \quad \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}\right),$$

. . . .

Negli estremi di uno qualunque di questi intervalli (che diconsi *intervalli contigui ad* I) la funzione $f(x)$ ha il medesimo valore: per esempio in $\frac{1}{3}$ si ha:

$$x=\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots, \quad f(x)=\frac{1}{2}\left\{\frac{0}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots\right\}=\frac{1}{2},$$

e in $\frac{2}{3}$

$$x=\frac{2}{3}, \quad f(x)=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{3}{2^2}+\cdots\right\}=\frac{1}{2}.$$

Definiamo, allora, la $f(x)$ in ciascuno degli intervalli contigui ad I, ponendola uguale al valore che essa stessa assume negli estremi dell'intervallo considerato.

La funzione così definita è continua su tutto $(0, 1)$ e non mai decrescente: essa è quindi anche a variazione limitata. In ogni intervallo contiguo a I (esclusi gli estremi) esiste la derivata $f'(x)$, che è uguale a zero. E poichè la somma delle lunghezze di questi intervalli è uguale ad 1 (tale somma è, infatti,

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\right\}=1,$$

si ha

$$\int_0^1 f'(x)\,dx=0.$$

Ma è

$$f(0)=0 \quad , \quad f(1)=1,$$

dunque, essendo,

$$\int_0^1 f'(x)\,dx \neq f(1)-f(0),$$

la $f(x)$ non è assolutamente continua.

Definiamo ora la $f(x)$ in $(1, 2)$ mediante la scrittura

$$f(x)=f(2-x),$$

e in $(2, 4)$ mediante

$$f(x)=-f(4-x).$$

Per la funzione così definita si ha: $f(0)=f(4)$

$$\int_0^4 f(x)\,dx=0$$

$$\int_0^4 [f'(x)]^2\,dx=0$$

$$\int_0^4 [f(x)]^2\,dx>0,$$

e non può dunque essere verificata la disuguaglianza da noi dimostrata per le funzioni assolutamente continue.

3. Vogliamo aggiungere qualche considerazione sul rapporto fra gli integrali di f^2 e f'^2. Abbiamo già ricordato che, nell'ipotesi $f(a)=f(b)=0$, è

$$\int_a^b f^2\,dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b f'^2 dx.$$

Se fosse solamente $f(a)=0$, quale sarebbe il massimo del rapporto dei due integrali considerati?

Si ponga

$$J_p = \int_a^b (p^2 f'^2 - f^2)\,dx\,,$$

e si cerchi il minimo di quest' integrale fra tutte le funzioni che soddisfano alla condizione $f(a)=0$.

Le *estremali* dell' integrale detto si ottengono integrando l'equazione differenziale

$$f + p^2 f'' = 0\,,$$

e sono date da

$$f = c_1 \cdot \cos\frac{x}{p} + c_2 \operatorname{sen}\frac{x}{p}$$

Per due punti qualunque di ascisse x_1 e x_2, passa sempre una di queste estremali, ed una sola, tutte le volte che è $|x_1 - x_2| < p\,\pi$; dunque se è

$$p > \frac{b-a}{\pi} > 0\,;$$

è sempre possibile circondare l'estremale che congiunge i punti $(a\,,0)$, $(b\,,h)$, dove h è qualunque, con un fascio di estremali che ricopra tutta la striscia compresa fra le rette $x=a$, $x=b$. E poichè qui la derivata seconda rispetto a f' di $p^2 f'^2 - f^2$ è sempre positiva, l'estremale detta dà il minimo assoluto fra tutte le funzioni che assumono in a e in b rispettivamente i valori 0 e h.

Indichiamo con $J_p(h)$ il valore minimo di J_p corrispondente ad h. L'estremale che congiunge $(a\,,0)$ con $(b\,,h)$ è

$$f = \frac{h}{\sin\frac{b-a}{p}} \operatorname{sen}\frac{x-a}{p}\,,$$

e si ha perciò

$$J_p(h) = ph^2 \operatorname{cotg}\frac{b-a}{p}$$

È dunque

$$J_p(h) \geq 0 \quad \text{per} \quad \frac{b-a}{p} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\text{con } J_p(h) = 0 \text{ solo se è } \frac{b-a}{p} = \frac{\pi}{2}\right),$$

$$J_p(h) < 0 \quad \text{per} \quad \frac{b-a}{p} > \frac{\pi}{2}.$$

Se ne conclude che

Se $f(x)$ è una funzione assolutamente continua che si annulla in a, e tale che il quadrato della sua derivata — considerato là dove questa derivata esiste — sia integrabile, è

$$\int_a^b f^2\, dx \leq 4\, \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b f'^2\, dx\,,$$

potendo aversi effettivamente il segno di uguaglianza (¹).

Matematica. — *Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES.

Lorsque M. Enriques introduisit, dans la théorie des surfaces algébriques, la notion de plurigenre, il remarqua que la surface du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, avait les genres arithmétique et géométrique nuls ($p_a = p_g = 0$), mais le bigenre égal à l'unité ($P_2 = 1$) (²). Plus tard, M. Enriques démontra que toute surface algébrique régulière, dépourvue de courbe canonique mais possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro, peut se ramener, par une transformation birationnelle, à cette surface du sixième ordre (³). M. Enriques fit, de plus, une étude très

(¹) Considerando delle funzioni a derivata limitata e nulle in a, E. E. Levi (*Sui criteri sufficienti per il massimo e per il minimo nel calcolo delle variazioni*, Annali di matematica, tomo XXI, ser. III, Lemma I) aveva già trovato che l'integrale di f^2, non può superare quello di f'^2 moltiplicato per $\frac{(b-a)^2}{2}$.

(²) F. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Chap. VI, n. 39), Memorie della Soc. ital. delle Scienze (dei XL), 1896, ser. 3ª, tom. X. On sait que M. Castelnuovo a, vers la même époque, démontré que les conditions de rationnalité d'une surface sont $p_a = P_2 = 0$.

(³) F. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, idem., 1906, ser. 3ª, tom. XIV. Au sujet des surfaces de genres zéro et de bigenre un, voir aussi: G. Fano, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari*, Rendiconti