ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Sulle equazioni integrali miste ed integro-differenziali.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

1. In un precedente lavoro [1] abbiamo ridotto il problema della risoluzione delle equazioni integro-differenziali allo studio delle equazioni integrali di tipo misto; cioè le

$$\varphi(x) + \mu \int_0^x \mathrm{M}(xy)\, \varphi(y)\, dy + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\, \varphi(y)\, dy = f(x)\,, \tag{1}$$

$$\mu \int_0^x \mathrm{M}(xy)\, \varphi(y)\, dy + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\, \varphi(y)\, dy = f(x)\,, \tag{2}$$

che diremo rispettivamente equazioni miste (o Volterra-Fredholm) di seconda e di prima specie; λ e μ sono diversi da zero.

Per trattare la (1), assumiamo l'incognita ausiliaria $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \varphi(x) + \mu \int_0^x \mathrm{M}(xy)\, \varphi(y)\, dy\,. \tag{3}$$

Di qui si trae immediatamente:

$$\varphi(x) = \psi(x) - \mu \int_0^x \mathfrak{M}(xy)\, \varphi(y)\, dy\,, \tag{4}$$

ove $\mathfrak{M}$ sia il nucleo risolvente di Volterra della (3), il quale dipende (come è noto) solo da M e μ.

Sostituendo, nella (1), sia la (3) per i primi due termini, sia la (4) pel terzo, si ha:

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy) \left\{ \psi(y) - \mu \int_0^y \mathfrak{M}(yz\mu)\, \psi(z)\, dz \right\} dy = f(x);$$

da cui, scambiando gli integrali nell'integrazione doppia, si ricava:

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\, \psi(y)\, dy - \lambda\mu \int_0^1 \psi(y)\, dy \cdot \int_y^1 \mathrm{M}_1(xz)\, \mathfrak{M}(zy)\, dz = f(x)\,,$$

ossia:

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{N}(xy)\, \psi(y)\, dy = f(x)\,, \tag{5}$$

[1] *Sulle espressioni integro-differenziali.* Questi Rend., ser. V, vol. XXII, 2° semestre 1913, pp. 409-414.

in cui si è posto

$$(6) \qquad N(xy) = M_1(xy) - \mu \int_y^1 M_1(xz)\, \mathfrak{M}(zy\mu)\, dz \, .$$

Dunque, la (1) è stata ricondotta, almeno formalmente per ora, ad un'equazione di Fredholm di seconda specie, mediante la soluzione d'una di seconda specie di Volterra.

Intanto, dalle (3), (4) si vede che, nel caso regolare, data la φ, la ψ esiste ed è unica; che, data la ψ, anche la φ esiste ed è unica; se una di esse è integrabile, lo è anche l'altra. Quindi il risultato ottenuto è valido.

2. Discutiamo adesso questa soluzione così ottenuta:

a) λ *non sia autovalore della* (5). Allora, per la teoria del Fredholm, la ψ esiste ed è unica; e dalla (4), formola di soluzione della (3), si ricava subito la φ; e si vede che anche essa è unica. Se $f(x) = 0$, si avrà $\psi(x) = 0$ e, quindi, $\varphi(x) = 0$.

b) λ *sia autovalore della* (5), *ed* $f(x) = 0$. Per la teoria del Fredholm, se λ è radice di multiplicità r, vi saranno per la ψ, al più, r valori linearmente indipendenti: sieno essi ϱ. Per le equazioni (4) che legano la φ e la ψ, si deducono ϱ soluzioni per la φ. Queste saranno anche esse linearmente indipendenti. Infatti, ove ciò non fosse, si dovrebbe avere:

$$a_1 \varphi_1 + \cdots + a_\varrho \varphi_\varrho = 0 \, ;$$

per la (3), si avrebbe poi:

$$\psi_i = \varphi_i(x) + \lambda \int_0^\infty M(xy)\, \varphi_i(y)\, dy \, ; \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

da cui:

$$\Sigma a_i \psi_i = \Sigma a_i \varphi_i + \lambda \int_0^\infty M(xy)\, \Sigma a_i \varphi_i(y)\, dy \, ;$$

ovvero, tenuto conto della relazione che intercede fra le φ, si avrebbe

$$\Sigma a_i \psi_i = 0 :$$

il che non è.

c) λ *sia autovalore della* (6) *ed* $f(x) \neq 0$. È ovvio che, se v'è una soluzione, ve ne saranno infinite, differenti fra loro per soluzioni dell'equazione omogenea corrispondente.

Ora, sempre per la teoria del Fredholm, condizione necessaria e sufficiente affinchè la (5) ammetta soluzioni, è che la f soddisfi a certe condizioni di ortogonalità. Se queste sono soddisfatte, vi sarà una soluzione ψ della (5), da cui si deduce poi la φ.

Ecco discusse le equazioni miste, in base alle teorie del Volterra e di Fredholm.

3. Si può anche discutere e studiare la (1), servendosi d'un altro procedimento. Poniamo $\mu = \lambda$; il che si può sempre fare, senza ledere la generalità, ponendo, ad es., $\mathrm{M} = \frac{\lambda}{\mu} \mathrm{M}'$; poniamo inoltre:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) = \varphi_1(x) \\ f(x) = f_1(x) \end{array}\right\} x < 0 , \qquad \left.\begin{array}{l} \varphi = \varphi_2(x) \\ f = f_2(x) \end{array}\right\} 0 \leq x \leq 1 , \qquad \left.\begin{array}{l} \varphi = \varphi_3(x) \\ f = f_3(x) \end{array}\right\} 1 < x .$$

Introduciamo poi una funzione $\mathrm{W}(xy)$ così definita:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{W}(xy) = \mathrm{M}(xy) & y \leq x \\ \mathrm{W}(xy) = 0 & y > 0 \end{array} \Big\} \; 0 \leq x \leq 1 .$$

È evidente che con tali posizioni la (1) si scinde nelle tre seguenti:

$$(7) \quad \varphi_1(x) - \lambda \int_x^0 \mathrm{M}(xy)\, \varphi_1(y)\, dy + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\, \varphi_2(y)\, dy = f_1(x) \quad x < 0 ,$$

$$(8) \quad \varphi_2(x) + \lambda \int_0^1 [\mathrm{W}(xy) + \mathrm{M}_1(xy)]\, \varphi_2(y)\, dy = f_2(x) \quad 0 \leq x \leq 1 ,$$

$$(9) \quad \varphi_3(x) + \lambda \int_1^x \mathrm{M}(xy)\, \varphi_3(y)\, dy + \lambda \int_0^1 [\mathrm{M}(xy) + \mathrm{M}_1(xy)]\, \mu_2(y)\, dy = f_3(x) \quad 1 < x .$$

Subito si noterà che, mentre la φ_2 figura ovunque, la φ_1 figura solo nella (7), e la φ_3 solo nella (9). Quindi converrà risolvere prima la (8). Essa non è altro che un'equazione di Fredholm, regolare, di seconda specie. Chiamando N la somma di W ed M_1, essa si scrive:

$$\varphi_2(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{N}(xy)\, \varphi_2(y) = f_2(x) .$$

Ora, al solito, vi sono tre casi:

a) *λ non è autovalore*. Allora la φ_2 esiste, è unica ed è data da:

$$\varphi_2(x) = f_2(x) - \lambda \int_0^1 \frac{\mathrm{D}\left(\frac{x}{y}, \lambda\right)}{\mathrm{D}(\lambda)} f_2(y)\, dy .$$

La φ_1 e la φ_2 ci sono fornite allora dalle equazioni regolari di Volterra, ricavate da (7) e (9):

$$(10) \quad \varphi_1(x) - \lambda \int_x^0 \mathrm{M}(xy)\, \varphi_1(y)\, dy = \left[f_1(x) - \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\, \varphi_2(y)\, dy \right] \quad x < 0 ,$$

$$(11) \quad \varphi_3(x) + \lambda \int_1^x \mathrm{M}(xy)\, \varphi_3(y)\, dy = \left[f_3(x) - \lambda \int_0^1 [\mathrm{M}(xy) + \mathrm{M}_1(xy)]\, \varphi_2(y)\, dy \right] \quad x > 1 .$$

Quindi, anche φ_1 e φ_3 esistono, e sono uniche. In particolare, se $f(x)=0$, sarà anche $\varphi(x)=0$.

b) λ *autovalore*, $f_2(x)=0$ (equazione omogenea). Supposto λ autovalore, la (8), ove $f(x)=0$, avrà r soluzioni linearmente indipendenti; da ciascuna di esse si ricava una φ_1 ed una φ_3 per mezzo delle (10), (11). In virtù di ciò, si vede che le diverse soluzioni sono esprimibili con combinazioni lineari di r soluzioni linearmente indipendenti.

c) λ *autovalore*, $f_2(x)\neq 0$. Allora: o la f_2 soddisfa a certe condizioni d'ortogonalità, e vi sono infinite soluzioni; o non vi soddisfa, e non vi sono soluzioni. Dire che la f_2 soddisfa a certe condizioni d'ortogonalità equivale a dire che la f le soddisfa pure, come è evidente.

4. Resta da trattare la (2), equazione mista di prima specie. Ma essa, seguendo il procedimento da me indicato altrove [1], si può ridurre ad equazione di prima specie del Fredholm.

Oppure, servendosi del metodo ora esposto, essa si può scindere nelle tre altre:

$$(12)\qquad -\lambda\int_x^0 \mathrm{M}(xy)\,\varphi_1(y)\,dy=\left[f_1(x)-\lambda\int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\,\varphi_2(y)\,dy\right]\quad x<0,$$

$$(13)\qquad \lambda\int_0^1[\mathrm{W}(xy)+\mathrm{M}_1(xy)]\,\varphi_2(y)\,dy=f_2(x)\qquad 0\leq x\leq 1,$$

$$(14)\qquad \lambda\int_1^x \mathrm{M}(xy)\,\varphi_3(y)\,dy$$

$$=\left[f_3(x)-\lambda\int_0^1[\mathrm{M}(xy)+\mathrm{M}_1(xy)]\,\varphi_2(y)\,dy\right]\quad x>1,$$

di cui la (13) deve essere, come la (8), risolta dapprima.

5. Riassumendo i risultati ottenuti in questa e nella precedente Nota, possiamo dire:

I. *Le equazioni lineari integro-differenziali tipo Volterra di primo e secondo genere si riducono ad equazioni integrali dello stesso tipo e di seconda (o terza specie).*

II. *Quelle tipo Volterra di terzo genere, ad equazioni dello stesso tipo e di prima specie.*

III. *Quelle tipo Fredholm e miste di primo e secondo genere in generale ad equazioni integrali miste (in particolare di Fredholm) di seconda (o terza) specie.*

IV. *Quelle tipo Fredholm e miste di terzo genere, al tipo misto di prima specie.*

[1] *Sulle equazioni integrali*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, tom. XXXVII, 1° semestre 1914, pp. 72-109.

V. *Le equazioni integrali miste di seconda specie, si riducono alla soluzione successiva d'una integrale di Volterra o d'una di Fredholm, di seconda specie.*

VI. *Quelle di prima specie, ad equazioni di prima specie.*

Quindi, tutta la discussione delle integro-differenziali si può ricondurre, in modo semplice ed uniforme, alle teorie di Volterra e Fredholm.

Vi sarà quindi da attendersi l'esistenza di autovalori e di tutte le singolarità inerenti a tal caso; tratteremo in seguito qualche esempio.

Così, subito si vede che:

VII. *Le integro-differenziali tipo Volterra di primo e secondo genere sono sempre risolubili con sviluppi tipo Volterra.*

VIII. *Quelle dello stesso tipo, ma di terzo genere, sono soggette, per la risolubilità, a condizioni derivanti da quelle di risolubilità delle equazioni di Volterra di prima specie.*

Infine, se supponiamo di dover trattare una integro-differenziale lineare del Volterra, i cui nuclei sieno del tipo $F(xy)$: se cioè ci troviamo di fronte ad un problema ereditario (in cui la legge d'ereditarietà sia invariante attraverso il tempo), per quanto precede si vede che la sua riduzione ad equazione integrale di Volterra è esclusivamente operata con la composizione dei nuclei dati con le potenze $(x-s)^{\alpha}$.

E ricordando [1] che la composizione (secondo Volterra) di nuclei del *ciclo chiuso* (cioè funzioni di $x-s$) dà ancora nuclei dello stesso tipo, si può enunciare il teorema:

IX. *Ogni equazione lineare integro-differenziale di Volterra, i cui nuclei sieno del tipo* $F(x-s)$, *è riducibile ad un'equazione integrale di Volterra il cui nucleo è dello stesso tipo.*

Ovvero, in altre parole:

Le integro-differenziali lineari del ciclo chiuso si riducono ad equazioni integrali del ciclo chiuso.

E se l'equazione cui si giunge, è di seconda specie, si può subito dire che:

X. *La soluzione delle integro-differenziali del ciclo chiuso si effettua con operazioni dello stesso ciclo.*

[1] Volterra, *Leçons sur les éq. int. ed int.-diff.*, pp. 52 ecc.; 148; 150 ecc.

Matematica. — *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie.* Nota del dott. E. BOMPIANI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.