ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Meccanica. — *Effusso da un recipiente forato lateralmente.* Nota di U. **Cisotti**, presentata dal Socio T. **Levi-Civita**.

In una precedente Nota (1) ebbi a considerare il problema dell'efflusso permanente di un liquido attraverso un foro piccolissimo, praticato nel mezzo del fondo di un recipiente a sezione rettangolare. Ponendomi ora in condizioni analoghe, mi propongo di studiare il caso in cui il foro B è scolpito su una parete laterale ad una altezza h sul fondo.

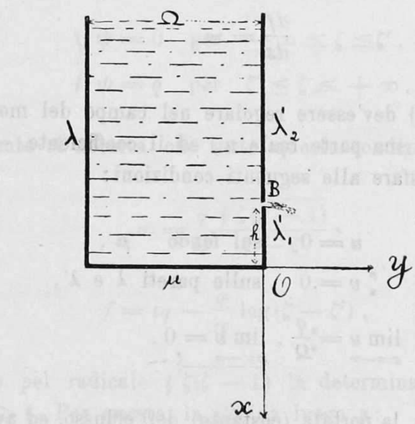

Fig. 1.

Ancor qui, come nel problema già studiato, si ha il regime uniforme in ocalità abbastanza lontana dall'orifizio. Ma, come è ben naturale, quando il foro è scolpito su parte laterale, la quota discriminante N dipende, oltre che dalla larghezza Ω del recipiente, anche dall'altezza h del foro sul fondo; in modo preciso basta assumere:

$$\frac{\mathrm{N}}{\Omega} = 2 + \frac{5}{7} \log_{10} \cosh \frac{\pi h}{\Omega} \,,$$

per essere lecito ritenere sensibilmente in regime uniforme il liquido che si trova nel recipiente ad una quota non inferiore ad N.

I. Assunta una coppia di assi Oxy, come è indicata in figura, si ha sul fondo μ: $x = 0$ e $-\Omega \leq y \leq 0$; sulle pareti λ' e λ: $y = 0$, $y = -\Omega$

(1) *Efflusso da un recipiente forato sul fondo* (Questi Rendiconti, vol. XVII, 23 novembre 1913, pp. 473-478).

e $x \leq 0$; mentre il foro B ha per coordinate $x = -h$, $y = 0$. Diciamo λ'_1 e λ'_2 i due tratti, limitato ed infinito, in cui rimane divisa λ' dal foro B.

Siano al solito u e v le componenti della velocità, φ e ψ il potenziale di velocità e la funzione di corrente, e facciamo le consuete posizioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} x + iy = z \,, \\ u - iv = w \,, \\ \varphi + i\psi = f \,. \end{cases}$$

Rammentiamo ancora che w ed f, funzioni di z, sono legate fra loro dalla relazione:

$$(2) \qquad \frac{df}{dz} = w \,.$$

La funzione $w(z)$ dev'essere regolare nel campo del moto, mentre sul contorno ed all' ∞ la sua parte reale u, ed il coefficiente $-v$ dell'immaginario, devono soddisfare alle seguenti condizioni:

$$(3) \qquad \begin{cases} u = 0 \quad \text{sul fondo} \quad \mu \,, \\ v = 0 \quad \text{sulle pareti } \lambda \text{ e } \lambda' \,, \\ \lim\limits_{x=-\infty} u = \dfrac{q}{\Omega} \,, \ \lim\limits_{x=-\infty} v = 0 \,, \end{cases}$$

avendo indicato con q la portata (costante) dell'efflusso, ed avendo ammesso che la densità costante del liquido sia $= 1$.

Anche la funzione $f(z)$ dev'essere regolare entro il campo del moto, e la sua parte immaginaria $i\psi$ deve assumere valori costanti sul contorno. Se si attribuisce a ψ la determinazione che gli compete assumendo $\psi = 0$ in O, si dovrà avere

$$(4) \qquad \begin{cases} \psi = 0 \quad , \quad \text{sopra } \lambda \,, \mu \,, \lambda'_1 \,, \\ \psi = q \quad , \quad \text{sopra } \lambda'_2 \,. \end{cases}$$

2. Converrà operare un cambiamento di variabile, il quale permetta di rappresentare il campo del moto in un semipiano. Designi ζ la nuova variabile complessa; vogliamo legare ζ a z mediante una relazione che permetta di rappresentare il campo del moto nel semipiano ζ di ordinate positive, in guisa che al contorno del campo z corrisponda l'asse reale del piano ζ, e precisamente λ, μ, λ'_1, λ'_2 vengano rappresentati rispettivamente dai tratti: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \zeta')$, $(\zeta', +\infty)$ dell'asse reale, il foro B avendo per corrispondente nel piano ζ il punto $\zeta' \geq 1$.

La teoria della rappresentazione conforme ci assicura la esistenza di una relazione tra z e ζ, la quale realizza l'accennato cambiamento di variabile. Prima di determinarla è lecito quindi sfruttarne l'esistenza.

Si considerino allora w ed f come funzioni della nuova variabile ζ nel semipiano ausiliare, esse vi devono essere regolari al finito e di più, a norma delle (3) e (4), si dovrà avere:

$$(3') \quad \begin{cases} u = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq \zeta \leq 1\,, \\ v = 0 \quad \text{per} \quad -\infty \leq \zeta \leq 0\,,\ 1 \leq \zeta \leq +\infty\,, \\ w = \dfrac{q}{\Omega} \quad \text{all'}\ \infty\,; \end{cases}$$

$$(4') \quad \begin{cases} \psi = 0 \quad \text{per} \quad -\infty \leq \zeta \leq \zeta'\,, \\ \psi = q \quad \text{per} \quad \zeta' \leq \zeta \leq +\infty\,, \end{cases}$$

3. **Facilmente si accerta che tutte queste condizioni sono soddisfatte, ponendo:**

$$(5) \qquad w = \frac{q}{\Omega} \frac{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}{\zeta - \zeta'}\,,$$

$$(6) \qquad f = iq - \frac{q}{\pi} \log(\zeta - \zeta')\,,$$

avendo adottato pel radicale $\sqrt{\zeta(\zeta-1)}$ la determinazione che è positiva per ζ reale e > 1. Per queste, la (2) dà luogo a:

$$dz = \frac{1}{w}\, df = \frac{1}{w} \frac{df}{d\zeta}\, d\zeta = -\frac{\Omega}{\pi} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-1)}\,,$$

dalla quale, integrando e tenendo presente che a $\zeta = 1$ deve corrispondere $z = 0$, si ricava la relazione;

$$(7) \qquad z = -\frac{\Omega}{\pi} \int_1^\zeta \frac{d\xi}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}} = \frac{\Omega}{\pi} \log \left\{ 2\left[\zeta - \sqrt{\zeta(\zeta-1)}\right] - 1 \right\},$$

che è appunto quella che deve legare le variabili z e ζ nelle circostanze supposte.

4. Le (5) e (6) dànno w ed f in funzione di ζ; ci converrà esprimere le stesse funzioni per z. A tal uopo risolviamo la (7) rispetto a ζ. Per raggiungere l'intento nel modo più spiccio, scriviamo la (7) nel modo seguente:

$$(7') \qquad \zeta - \sqrt{\zeta(\zeta-1)} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + e^{\frac{\pi z}{\Omega}} \right\},$$

e notiamo che la identità

$$\left\{ \zeta + \sqrt{\zeta(\zeta-1)} \right\} \left\{ \zeta - \sqrt{\zeta(\zeta-1)} \right\} = \zeta ,$$

permette, per la precedente, di scrivere:

$$\zeta + \sqrt{\zeta(\zeta-1)} = \frac{2\zeta}{1+e^{\frac{\pi z}{\Omega}}} . \tag{7''}$$

La eliminazione del radicale tra (7') e (7'') dà luogo ad una relazione lineare in ζ, che risoluta rispetto a ζ stessa dà infine l'espressione semplice:

$$\zeta = \cosh^2 \frac{\pi z}{2\Omega} . \tag{8}$$

Abbiamo chiamato ζ' il punto corrispondente a $z = -h$. Per la (8) avremo:

$$\zeta' = \cosh^2 \frac{\pi h}{2\Omega} . \tag{9}$$

Ora possiamo dare le espressioni definitive di w e di f in termini di z. Tenute presenti le (8) e (9), le (5) e (6) diventano infatti [1]:

$$w = -\frac{q}{2\Omega} \frac{\operatorname{senh} \frac{\pi z}{\Omega}}{\cosh^2 \frac{\pi z}{2\Omega} - \cosh^2 \frac{\pi h}{2\Omega}} , \tag{10}$$

$$f = iq - \frac{q}{\pi} \log \left\{ \cosh^2 \frac{\pi z}{2\Omega} - \cosh^2 \frac{\pi h}{2\Omega} \right\} . \tag{11}$$

5. Per $h = 0$, essendo $\cosh \frac{\pi h}{2\Omega} = 1$, le precedenti divengono rispettivamente:

$$w = -\frac{q}{\Omega} \coth \frac{\pi z}{2\Omega} , \tag{10'}$$

$$f = iq - \frac{2q}{\pi} \log \operatorname{senh} \frac{\pi z}{2\Omega} . \tag{11'}$$

Queste relazioni coincidono (salvo la inessenziale costante additiva iq e il

[1] Nel fare le debite riduzioni per arrivare all'espressione di w, si tenga presente che per $z = -\infty$ dev'essere $w = \frac{q}{\Omega}$.

cambiamento di q e di Ω in $2q$ e 2Ω) colle (5) e (7) della Nota citata [1]. La coincidenza non è occasionale, anzi era prevedibile *a priori*, se si pensa che per $h=0$ il foro è sul fondo e che è lecita *la riflessione* rispetto all'asse reale: si ha allora l'efflusso permanente di portata $2q$, da un recipiente largo 2Ω e forato nel mezzo del fondo.

6. Supponiamo $h>0$, e ricaviamo da (11) le equazioni $\psi=$ costante, dei filetti liquidi. Si ottiene

$$\psi = q - \frac{q}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi y}{\Omega}}{\coth\dfrac{\pi x}{\Omega}\cos\dfrac{\pi y}{\Omega}-\dfrac{\cosh\dfrac{\pi h}{\Omega}}{\mathrm{senh}\,\dfrac{\pi x}{\Omega}}}\,. \tag{12}$$

Sappiamo già che se $h=0$, cioè quando il foro è scolpito sul fondo, il regime è sensibilmente uniforme per $x \leq -2\Omega$ [2]. Proponiamoci ora di determinare un numero $N \geq 2\Omega$ tale che anche per $h>0$ si possa ritenere il regime uniforme quando $x \leq -N$.

Poichè $e^{-\pi} = 0.04\ldots$, avremo

$$0 \leq e^{\frac{\pi x}{\Omega}} \leq e^{-\frac{\pi N}{\Omega}} = (0.04\ldots)^{\frac{N}{\Omega}},$$

per $x \leq -N$. Ne segue che per tali valori di x,

$$-\frac{1}{\mathrm{senh}\,\dfrac{\pi x}{\Omega}} = \frac{2e^{\frac{\pi x}{\Omega}}}{1-e^{\frac{2\pi x}{\Omega}}}$$

sarà compreso tra 0 e $\dfrac{2e^{-\frac{\pi N}{\Omega}}}{1-e^{-\frac{2\pi N}{\Omega}}} = \dfrac{2(0.04\ldots)^{\frac{N}{\Omega}}}{1-(0.04\ldots)^{\frac{2N}{\Omega}}}$; anzi poichè per $N \geq 2\Omega$ è

$$(0.04\ldots)^{\frac{2N}{\Omega}} \leq (0.04\ldots)^4 = 0.000002\ldots,$$

[1] Nella (7) rilevo un errore tipografico: invece di $\frac{q}{\Omega}$ si deve leggere $\frac{q}{\pi}$. Durante la correzione delle bozze ho avuto occasione di leggere il recentissimo trattato di idrodinamica di Ramsey [*A Treatise on Hydrodynamics*, Part II; London, Bell, 1913] in cui a pag. 124 trovasi definita, a meno della costante iq, la formula (11').

[2] Cfr. la Nota citata.

si può ritenere senz'altro che $-\dfrac{1}{\operatorname{senh}\dfrac{\pi x}{\Omega}}$ sia compreso tra 0 e $2(0.04...)^{\frac{N}{\Omega}}$.

Dopo ciò siamo autorizzati a scrivere la seguente limitazione:

$$0 \leq -\frac{\cosh\dfrac{\pi h}{\Omega}}{\operatorname{senh}\dfrac{\pi x}{\Omega}} \leq 2(0.04...)^{\frac{N}{\Omega}} \cosh\frac{\pi h}{\Omega}, \qquad (x \leq -N). \tag{13}$$

D'altra parte per $x \leq -N \leq -2\Omega$, è con grande approssimazione [1]

$$\coth\frac{\pi x}{\Omega} = -1.$$

Ciò posto, se si assume N in guisa che $\dfrac{\cosh\dfrac{\pi h}{\Omega}}{\operatorname{senh}\dfrac{\pi x}{h}}$ sia trascurabile,

la (12) diviene:

$$\psi = q + \frac{q}{\Omega}\, y, \tag{14}$$

dalla quale si desume che per $x \leq -N$ le linee di flusso sono a ritenersi parallele alle pareti, ed il regime uniforme.

Ora, avuto riguardo alla (13), se si assume N in guisa che la quantità $2(0.04...)^{\frac{N}{\Omega}} \cosh\dfrac{\pi h}{\Omega}$ sia dell'ordine dei millesimi, ad es. ponendo

$$(0.04...)^{\frac{N}{\Omega}} \cosh\frac{\pi h}{\Omega} = 0.001, \tag{15}$$

siamo fatti certi che per un tale N e per $x \leq -N$ vale la (14), con molta approssimazione.

Da (15) ricavando $\dfrac{N}{\Omega}$ si ha, prendendo, per maggior comodità di calcolo, i logaritmi volgari, ed arrotondando lievemente le cifre:

$$\frac{N}{\Omega} = 2 + \frac{5}{7}\log_{10}\cosh\frac{\pi h}{\Omega}. \tag{16}$$

[1] Cfr. la Nota citata.

7. Nel caso particolare in cui il recipiente diviene infinitamente largo è $\Omega = \infty$, allora con un passaggio al limite, si ricava da (10) senza difficoltà:

$$w = \frac{2q}{\pi} \frac{z}{h^2 - z^2} \tag{17}$$

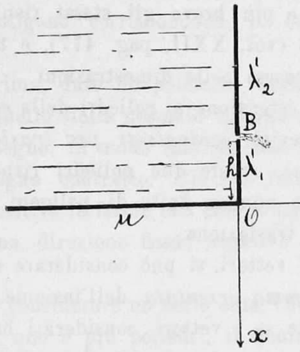

Fig. 2.

È facile ora esaurire la discussione, una volta in possesso dell' integrale (17) del movimento della massa liquida.

Meccanica. — *Esperienze sulla elasticità a trazione del rame.* Nota I del dott. ing. Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio V. Volterra.

Matematica. — *Sur certaines équations intégrales.* Nota di J. Soula, presentata dal Socio V. Volterra.

Le precedenti Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.