ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Mar Tirreno (da 15 m. a circa 35), avvertendo che a Ravagnese e a Boveto, presso Reggio di Calabria, questo livello si solleva per eccezione fino ad un centinaio di metri [1].

5° Che, da quanto precede, si palesa ben legittima l'istituzione, per le sabbie a Strombus, di un piano Tirreno, interposto cronologicamente fra il Siciliano e l'Olocene o Attuale.

6° Che i depositi olocenici, sollevati localmente fino a circa 2 m. (stazione ferroviaria di Cagliari), accusano mutamenti nei livelli rispettivi del mare e della terra emersa, avvenuti in tempi recentissimi, probabilmente posteriori alle memorie storiche. La frequenza di certe specie divenute in seguito più rare (alludo per esempio alla Purpura haemastoma e alla Eastonia rugosa), nei depositi olocenici preistorici, accusa nella fauna marina modificazioni incipienti.

Meccanica. — *Sopra la soluzione delle equazioni differenziali del moto di un punto attratto da più centri fissi posti in linea retta.* Nota dell'ing. dott. G. Armellini, presentata dal Socio V. Volterra.

1. In una Nota inserita negli Atti dell'Accademia di Torino [2], il prof. V. Volterra ha mostrato, per primo, la grande utilità che il metodo della stella del Mittag-Leffler poteva avere nella soluzione di molte questioni dinamiche. Il prof. Volterra porta come esempio quei problemi che conducono ad equazioni differenziali del tipo $p'_s = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k a_{sk}^{(r)} p_k p_r$, essendo $a_{sk}^{(r)} + a_{ks}^{(r)} = 0$; equazioni che egli stesso ha profondamente studiato in altri lavori [3].

Passando poi ad un problema di attrazione newtoniana, il prof. Volterra esamina il moto di un punto attratto da più punti fissi posti in linea retta.

Supponendo che il momento della quantità di moto rispetto alla retta stessa non sia nullo, egli dimostra che l'asse reale dei tempi t è interamente incluso dentro le stelle relative agli elementi incogniti; donde segue che il problema può ritenersi risoluto facendo uso di noti sviluppi, i quali però, non godono dell'uniforme convergenza.

2. Ciò posto, nella presente Nota io mi propongo di dimostrare che, nella questione ora nominata, non solo l'asse reale dei tempi è incluso nelle

(1) Si veda a questo proposito il capitolo III dell'opera precitata di Gignoux.

(2) *Sopra alcune applicazioni della rappresentazione analitica delle funzioni del prof. Mittag-Leffler*, Nota del Socio Volterra, Atti Acc. di Torino, adunanza 16 aprile 1899.

(3) Atti Acc. di Torino: adunanze 27 febbraio, e 27 marzo 1898; e 15 gennaio 1899. Note del Socio V. Volterra.

stelle degli elementi incogniti, ma che, oltre a ciò, noi possiamo sempre costruire una striscia di larghezza finita contenente il detto asse, e limitata da due rette ad esso parallele, la quale resti interna alle stelle ora nominate. Servendoci di questo risultato, potremo grandemente semplificare nel nostro caso gli sviluppi del Mittag-Leffler, riducendoli a serie procedenti secondo le potenze della quantità $\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$. In tal caso otteniamo anche l'uniforme convergenza che, come è noto, non si aveva finchè le nostre cognizioni si limitavano a sapere che solo l'asse reale è interno alle stelle degli elementi che si domandano.

3. In una Nota da me pubblicata nei Comptes-Rendus [1], io ho dimostrato la risolubilità del problema degli n corpi con gli sviluppi del Mittag-Leffler, tutte le volte che si sappia *a priori* che gli urti sono semplici. Come caso particolare di questo teorema troviamo il moto di un punto attratto da più centri fissi, comunque disposti. Sarà bene, però, di far osservare che, nel caso generale in cui i centri fissi sono disposti ad arbitrio, è necessario ricorrere ad una variabile ausiliaria q opportunamente scelta, giacchè l'asse reale dei tempi non è sempre contenuto nelle stelle relative alle variabili. All'opposto, nel caso di cui ora trattiamo, l'asse reale è tutto interno alle stelle nominate, e non occorre quindi alcun uso di parametri ausiliarî; non converrebbe perciò di trattare questo problema col metodo generale che io ho applicato al primo: ma è bene di risolverlo con considerazioni speciali.

4. Scegliamo la retta luogo dei punti fissi come asse delle x, chiamando con r la distanza del punto mobile P dall'asse fisso, e con ϑ l'angolo che il raggio r forma con un piano fisso passante per l'asse stesso. Riferendoci, per ora, alle coordinate cilindriche $x\,r\,\vartheta$, avremo gl' integrali primi:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\} - f\sum_{i=1}^{i=n}\frac{m_i}{\varrho_i} = h. \tag{2}$$

Nelle (1) e (2), c indica la costante delle aree (che supponiamo sempre *diversa da zero*), h quella delle forze vive, f il coefficiente attrattivo, m_i la massa di una qualsiasi degli n punti fissi, ed infine ϱ_i la distanza di P da m_i. La massa μ del punto mobile P non entra nelle nostre considerazioni, comparendo a fattore nei due membri delle equazioni del moto.

[1] *Un théorème général sur le problème des n corps.* Note de M.r G. Armellini, Comptes-Rendus de l'Académie des sciences, séance du 9 mars 1914.

Scegliamo ora le tre unità di lunghezza, di tempo, e di massa, in modo che si abbia:

$$(3) \qquad c = 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i = 1 \quad ; \quad 2f + \sqrt{2|h|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ,$$

la qual cosa è sempre possibile, come potremmo facilmente dimostrare. Ciò posto, poichè tutte le masse m_i sono positive, e poichè si ha sempre $\varrho_i \geqq r$, avremo, dalle (1) e (2), l'ineguaglianza:

$$(4) \qquad h \geqq \frac{1}{2r^2} - \frac{f}{r} .$$

Studiamo la curva $y = \frac{1}{2r^2} - \frac{f}{r}$. Per $r = 0$, si ha $y = \infty$; crescendo r la y diminuisce; per $r = \frac{1}{2f}$ si ha $y = 0$; per $r = \frac{1}{f}$ la y assume il valore minimo, $y = -\frac{f^2}{2}$. Continuando r a crescere oltre $\frac{1}{f}$, la y aumenta di nuovo, finchè, per $r = \infty$, si ha $y = 0$. Qualunque siano quindi le condizioni iniziali del moto, se c non è nulla, e se si scelgono le unità di misura in modo da soddisfare alle (3), si ha sempre $h \geqq -\frac{f^2}{2}$.

5. Supponiamo ora assegnato il valore della costante h, e vediamo dentro quali limiti possa variare la r. Dalla (4) deduciamo:

$$(5) \qquad 2hr^2 + 2fr - 1 \geqq 0 :$$

ineguaglianza che studieremo analizzando separatamente i casi di h positivo, nullo o negativo.

I caso: $h > 0$. Il primo membro ammette due radici reali: una, r_1, negativa,

$$r_1 = \frac{-f - \sqrt{f^2 + 2h}}{2h} ;$$

l'altra, r_2, positiva,

$$r_2 = \frac{-f + \sqrt{f^2 + 2h}}{2h} > \frac{1}{2f} .$$

Il primo membro della (5) si conserva positivo se si ha $r < r_1$, oppure $r > r_2$; scartando quindi i valori negativi del raggio vettore, perchè privi di significato meccanico, vediamo che in questo caso il punto mobile P *può allontanarsi indefinitamente dalla retta luogo dei centri fissi; ma la sua distanza da essa resta sempre maggiore di un limite finito e diverso da zero.*

II caso: $h = 0$. La (5) ci dice che *la distanza di* P *dall'asse fisso può crescere all'infinito, ma deve restare sempre maggiore di* $\frac{1}{2f}$.

III caso: $h < 0$. In questo caso le due radici r_1 e r_2 sono reali $\left(\text{dovendo essere necessariamente, come è stato dimostrato, } h \geqq -\frac{f^2}{2}\right)$, e positive, e si ha $r_1 > r_2$. L'ineguaglianza è soddisfatta per $r_1 \geqq r \geqq r_2$. In questo caso, quindi, *la distanza del punto mobile dall'asse fisso resta sempre compresa tra due limiti finiti e diversi da zero.*

Indicando, al solito, con $|h|$ il valore assoluto di h, sarà facile il dedurre, da questa analisi, che si ha sempre:

$$r \geqq \frac{1}{2f + \sqrt{2|h|}} = \sqrt{2\pi}\,.$$

L'equazione delle forze vive, chiamando con v la velocità assoluta di P, ci dà allora:

$$v^2 = 2h + 2f \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i}{\varrho_i} \leqq 2h + 2\frac{f}{r} \leqq \left\{2f + \sqrt{2|h|}\right\}^2 = \frac{1}{2\pi}\,.$$

6. Consideriamo ora le equazioni del moto di P in coordinate cartesiane:

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x' & \frac{dx'}{dt} &= \varphi = -f \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i(x - a_i)}{\varrho_i^3} \\ \frac{dy}{dt} &= y' & \frac{dy'}{dt} &= \chi = -f \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i\, y}{\varrho_i^3} \\ \frac{dz}{dt} &= z' & \frac{dz'}{dt} &= \psi = -f \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i\, z}{\varrho_i^3}\,, \end{aligned}\right.$$

dove con a_i abbiamo indicato l'ascissa di m_i; e studiamole applicando noti teoremi.

Facciamo crescere o decrescere t partendo dal valore iniziale t_0 e restando sempre sull'asse reale, fino ad un valore *reale* qualsiasi $\bar{t}$; siano $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{x}'\,\bar{y}'\,\bar{z}'\,\bar{\varrho}_i$ i corrispondenti valori delle variabili, anche essi certamente *reali*. Avremo, per quanto è stato detto,

$$(10)\qquad \bar{\varrho}_i^2 = (\bar{x} - a_i)^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \geqq \left\{\frac{1}{2f + \sqrt{2|h|}}\right\}^2 = 2\pi\,,$$

$$(11)\qquad \bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 + \bar{z}'^2 \leqq \left\{2f + \sqrt{2|h|}\right\}^2 = \frac{1}{2\pi}\,.$$

Indichiamo, con $x\,y\,z$, dei valori qualsiasi, in generale, *complessi*, delle tre variabili. È facile il vedere, tenendo conto della (10), che le funzioni φ, χ, ψ sono svolgibili in serie di potenze delle quantità:

$$x-\overline{x}=\xi \quad , \quad y-\overline{y}=\eta \quad , \quad z-\overline{z}=\zeta\,;$$

purchè $\xi\,\eta\,\zeta$ siano, in valore assoluto, sufficientemente piccole.

Facciamo, per esempio,

$$(12) \qquad |\xi| \leqq \frac{1}{8\left\{2f+\sqrt{2|h|}\right\}}=\sqrt{\frac{\pi}{32}}\,.$$

e analogamente per $|\eta|$ e $|\zeta|$, scegliendo il coefficiente 8 al denominatore per semplificare i calcoli.

Avremo, finchè ξ, η, ζ variano dentro questi campi,

$$|x-a_i| \leqq |\overline{x}-a_i|+|\xi| \leqq \overline{\varrho}_i+|\xi| \leqq \overline{\varrho}_i+\frac{1}{8\left\{2f+\sqrt{2|h|}\right\}}$$

$$|\varrho_i| > \overline{\varrho}_i-\frac{3}{8\left\{2f+\sqrt{2|h|}\right\}}\,;$$

e quindi:

$$(13) \qquad |\varphi| \leqq \left| f\left\{\frac{\overline{\varrho}_i+\dfrac{1}{8\left\{2f+\sqrt{2|h|}\right\}}}{\overline{\varrho}_i-\dfrac{3}{8\left\{2f+\sqrt{2|h|}\right\}}}\right\}\right| < 2f \leqq 2f+\sqrt{2|h|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Simili ineguaglianze troveremo per $|\chi|$ e $|\psi|$.

Analogamente, se con $x'\,y'\,z'$ indichiamo dei valori in generale *complessi* delle tre derivate, e poniamo

$$(14) \qquad x'=\overline{x}'+\xi' \quad , \quad y'=\overline{y}'+\eta' \quad , \quad z'=\overline{z}'+\zeta'\,,$$

e facciamo variare ξ', η', ζ' in modo che i loro valori risultino in modulo inferiori o, al più, eguali a $\dfrac{\pi\left(2f+\sqrt{2|h|}\right)}{4-\pi}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\,(4-\pi)}$, avremo, in virtù della (11),

$$|x'| \leqq |\overline{x}'|+|\xi'| \leqq \frac{4}{\sqrt{2\pi}\left\{4-\pi\right\}}\,;$$

e similmente per $|y'|$ e $|z'|$.

7. Riassumendo: se facciamo variare le quantità $x\,y\,z\;x'\,y'\,z'$ nell'intorno di $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\;\overline{x}'\,\overline{y}'\,\overline{z}'$, in modo che i moduli

$$|x-\overline{x}| \quad |y-\overline{y}| \quad |z-\overline{z}| \quad |x'-\overline{x}'| \quad |y'-\overline{y}'| \quad |z-\overline{z}'|$$

si conservino sempre inferiori od uguali, i primi tre a $\sqrt{\frac{\pi}{32}}$, e gli altri a $\frac{\pi}{\sqrt{2}\{4-\pi\}}$; i secondi membri delle equazioni (9) saranno sviluppabili secondo le potenze ascendenti dei moduli stessi, e rimarranno sempre inferiori, o, al più, eguali, gli uni a $\frac{4}{\sqrt{2\pi}\{4-\pi\}}$, e gli altri a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Ora, dato un sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dy_i}{dx} = Y_i(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

indicando con $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ i valori corrispondenti ad $x = x_0$, se i secondi membri sono sviluppabili in serie di potenze convergenti per $|y_i - y_{i0}| \leq \lambda_i$, e se dentro questi limiti si ha sempre $|Y_i| \leq L_i$; allora gl'integrali y_i sono sviluppabili secondo le potenze di $x - x_0$, e gli sviluppi convergono certamente se $|x - x_0|$ è inferiore, o, al più, eguale, al minore dei rapporti:

$$\frac{\lambda_1}{L_1}; \frac{\lambda_2}{L_2}; \frac{\lambda_3}{L_3}; \dots; \frac{\lambda_n}{L_n}.$$

Applicando questo teorema al sistema (9), abbiamo, per esso,

$$(14)\quad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\{4-\pi\}} \quad ; \quad L_1 = L_2 = L_3 = \dfrac{4}{\sqrt{2\pi}\{4-\pi\}}; \\ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \sqrt{\dfrac{\pi}{32}} \quad ; \quad L_4 = L_5 = L_6 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}. \end{cases}$$

Nel nostro caso i sei rapporti risultano tutti eguali fra loro, avendosi:

$$(15)\quad \frac{\sqrt{\frac{\pi}{32}}}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}}} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\,(4-\pi)}}{\frac{4}{\sqrt{2\pi}\,(4-\pi)}} = \frac{\pi}{4}.$$

Possiamo quindi concludere che gl'integrali x, y, z, x', y', z', sono sviluppabili in serie di potenze della quantità $t - \bar{t}$, convergenti per $|t - \bar{t}_0| \leq \frac{\pi}{4}$. E, poichè $\bar{t}$ è un valore reale qualsiasi di t, ne segue che, se noi costruiamo una striscia di spessore $\frac{\pi}{2}$, limitata da due rette parallele all'asse reale e distanti da esso, da una parte e dall'altra, di $\frac{\pi}{4}$, questa

striscia è tutta interna alle stelle relative alle variabili $x\,y\,z\;x'\,y'\,z'$. Abbiamo allora, con una trasformazione conforme,

$$(16)\qquad \begin{cases} x = A_0 + A_1 \left\{\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right\} + A_2 \left\{\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right\}^2 + \cdots \\ y = B_0 + B_1 \left\{\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right\} + B_2 \left\{\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right\}^2 + \cdots \\ \text{ecc. ecc.} \end{cases}$$

Le costanti A_i B_i ecc. sono facilmente determinabili, date le condizioni iniziali del moto; le (16), uniformemente convergenti per t reale qualsiasi, rappresentano l'integrale generale del sistema (9).

8. Riassumendo: *consideriamo un punto mobile* P *sottoposto all'attrazione di più centri fissi* $m_1\, m_2 \ldots m_n$ *posti in linea retta, e supponiamo che il momento della quantità di moto di* P *rispetto all'asse stesso non sia nullo. Allora, scegliendo le tre unità di misura secondo la* (3), *e costruendo una striscia di spessore* $\frac{\pi}{2}$ *limitata da due rette parallele e simmetriche rispetto all'asse reale dei tempi, essa risulta tutta interna alle stelle di Mittag-Leffler relative alle coordinate* $x\,y\,z$ *e alle velocità* $x'\,y'\,z'$.

In conseguenza sappiamo trovare delle serie procedenti secondo le potenze di $\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ *le quali convergono uniformemente, per valori reali del tempo, da* $t = -\infty$ *a* $t = \infty$, *e ci rappresentano l'integrale generale delle equazioni del moto.*

Meccanica. — *Potenziali newtoniani dell'elasticità.* Nota I di Pietro Burgatti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

1. Gli ordinarî potenziali newtoniani di spazio, di semplice strato e di doppio strato, tanto importanti nella fisica-matematica, si presentarono anche ai primi matematici che tentarono lo studio dell'equazioni per l'equilibrio dei corpi elastici; e le loro proprietà ispirarono poi i matematici del nostro tempo nella ricerca dei metodi generali d'integrazione, o nella risoluzione di problemi particolari. La loro importanza in questa teoria non è occasionale; ma è dovuta alla speciale forma dell'equazioni per l'equilibrio. Tuttavia i legami, direi così, fra queste equazioni e i detti potenziali, non sono così semplici e diretti come quelli che li collegano coll'equazione di Laplace. Onde viene l'idea che esistano altre funzioni, dotate di proprietà analoghe ai detti potenziali, ma più direttamente collegate con l'equazioni del-