ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

striscia è tutta interna alle stelle relative alle variabili $x\,y\,z\,x'\,y'\,z'$. Abbiamo allora, con una trasformazione conforme,

$$(16)\qquad \begin{cases} x = A_0 + A_1 \left\{ \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \right\} + A_2 \left\{ \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \right\}^2 + \cdots \\ y = B_0 + B_1 \left\{ \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \right\} + B_2 \left\{ \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \right\}^2 + \cdots \\ \text{ecc. ecc.} \end{cases}$$

Le costanti A_i B_i ecc. sono facilmente determinabili, date le condizioni iniziali del moto; le (16), uniformemente convergenti per t reale qualsiasi, rappresentano l'integrale generale del sistema (9).

8. Riassumendo: *considieriamo un punto mobile* P *sottoposto all'attrazione di più centri fissi* $m_1\,m_2 \ldots m_n$ *posti in linea retta, e supponiamo che il momento della quantità di moto di* P *rispetto all'asse stesso non sia nullo. Allora, scegliendo le tre unità di misura secondo la* (3), *e costruendo una striscia di spessore* $\frac{\pi}{2}$ *limitata da due rette parallele e simmetriche rispetto all'asse reale dei tempi, essa risulta tutta interna alle stelle di Mittag-Leffler relative alle coordinate* $x\,y\,z$ *e alle velocità* $x'\,y'\,z'$.

In conseguenza sappiamo trovare delle serie procedenti secondo le potenze di $\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ *le quali convergono uniformemente, per valori reali del tempo, da* $t = -\infty$ *a* $t = \infty$, *e ci rappresentano l'integrale generale delle equazioni del moto.*

Meccanica. — *Potenziali newtoniani dell'elasticità.* Nota I di Pietro Burgatti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

1. Gli ordinarî potenziali newtoniani di spazio, di semplice strato e di doppio strato, tanto importanti nella fisica-matematica, si presentarono anche ai primi matematici che tentarono lo studio dell'equazioni per l'equilibrio dei corpi elastici; e le loro proprietà ispirarono poi i matematici del nostro tempo nella ricerca dei metodi generali d'integrazione, o nella risoluzione di problemi particolari. La loro importanza in questa teoria non è occasionale; ma è dovuta alla speciale forma dell'equazioni per l'equilibrio. Tuttavia i legami, direi così, fra queste equazioni e i detti potenziali, non sono così semplici e diretti come quelli che li collegano coll'equazione di Laplace. Onde viene l'idea che esistano altre funzioni, dotate di proprietà analoghe ai detti potenziali, ma più direttamente collegate con l'equazioni del-

l'equilibrio elastico, e costituenti effettivamente per queste equazioni l'elemento analitico fondamentale. Orbene, coteste funzioni esistono, e son quelle appunto che io distinguo col nome di *potenziali newtoniani dell'elasticità.*

In questa prima Nota mi propongo di definirli e di accennare brevemente le loro proprietà.

Consideriamo l'equazione indefinita per l'equilibrio elastico dei corpi isotropi non soggetti a forze di massa nella forma [1]

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Es} = (\Omega^2 - \omega^2)\,\mathrm{grad\,div\,s} + \omega^2 \Delta' \mathrm{s} = 0\,,$$

ove s è lo spostamento, E è un simbolo rappresentante l'operazione

$$(\Omega^2 - \omega^2)\,\mathrm{grad\,div} + \omega^2 \Delta'\,.$$

Siano P e O due punti; $r = \mathrm{mod}\,(\mathrm{P} - \mathrm{O})$, e **a** un vettore costante.

Si verifica immediatamente che

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{s} = \gamma \mathrm{a} = \left(\frac{2\Omega^2}{r} - (\Omega^2 - \omega^2)\frac{d\,\mathrm{grad}\,r}{d\mathrm{P}} \right) \mathrm{a}$$

soddisfa la (1). La γ è una omografia vettoriale, e precisamente una dilatazione. Questo $\gamma\mathbf{a}$ si chiamerà il *potenziale newtoniano elementare della elasticità* prodotto da un vettore $\mathbf{a} = \mathrm{M} - \mathrm{O}$ sul punto P di massa unitaria. È un vettore finito e continuo per qualunque P dello spazio (tenuto fisso O); eccettuato per O, ove diventa di grandezza infinita come $\frac{1}{r}$.

Si osservi che $\mathrm{grad}\,r$ è uguale a $\frac{\mathrm{P}-\mathrm{O}}{r}$, e perciò è un vettore unitario che definisce la direzione di P — O.

Si ha

$$\text{(3)} \qquad \gamma \mathrm{a} = \frac{2\Omega^2}{r}\,\mathrm{a} - (\Omega^2 - \omega^2)\,\frac{d\left(\frac{\mathrm{P}-\mathrm{O}}{r}\right)}{d\mathrm{P}}\,\mathrm{a} =$$

$$= \frac{\Omega^2 + \omega^2}{r}\,\mathbf{a} - (\Omega^2 - \omega^2)\,\frac{a \cos\alpha}{r}\,\mathrm{grad}\,r\,.$$

ove $\alpha = \mathrm{ang}\,(\mathrm{P} - \mathrm{O}\,,\mathbf{a})$. Questa equazione prova che $\gamma\mathbf{a}$ è complanare con **a** e P — O, e risulta

$$\mathrm{mod}\,\gamma\mathbf{a} = \frac{a}{r}\sqrt{4\,\omega^4 \cos^2\alpha + (\Omega^2 + \omega^2)^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}\,.$$

Si vede ancora che P — O è una direzione unita di γ; le altre, infinite, sono nel piano per O perpendicolare a P — O. Perciò la γ si potrebbe chiamare una dilatazione *simmetrica* rispetto all'asse OP.

[1] Per i simboli e le formule dell'analisi vettoriale vedi l'*Analyse vectorielle générale*, di Burali Forti e Marcolongo, tom. I. Per la teoria dell'elasticità, vedi il tom. II.

2. Sia ora $\mathbf{u}$ un vettore funzione dei punti O d'uno spazio S racchiuso dalla superficie σ; monodromo finito e continuo in tutto S.

Allora

$$\mathbf{w} = \int_S \gamma \mathbf{u}\, dS\,, \tag{4}$$

ove γ è la dilatazione precedentemente definita, sarà chiamato il *potenziale newtoniano di spazio dell'elasticità*. È un vettore funzione del punto P, finito e continuo in tutto lo spazio esterno ad S, e all' ∞ tende a zero come $\frac{1}{r}$. Anche quando P è interno a σ, ha un significato ed è finito e continuo; come risulta dall'espressione (3) di $\gamma\mathbf{u}$.

Calcoliamo la *divergenza di* $\mathbf{w}$. Si ha, tenendo presente che $\mathbf{u}$ non dipende da P,

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \int_S \operatorname{div} \gamma \mathbf{u}\, dS = \int_S \operatorname{grad} \gamma \times \mathbf{u}\, dS\,.$$

Ma

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \gamma &= 2\Omega^2 \operatorname{grad} \frac{1}{r} - (\Omega^2 - \omega^2) \operatorname{grad} \left(\frac{d \operatorname{grad} r}{dP} \right) \\ &= 2\Omega^2 \operatorname{grad} \frac{1}{r} - (\Omega^2 - \omega^2) \operatorname{grad} (\Delta r)\,; \end{aligned}$$

e notando che $\Delta r = \frac{2}{r}$, si trova subito

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 2\omega^2 \int_S \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{u}\, dS = -\,2\omega^2 \int_S \frac{\operatorname{grad} r \times \mathbf{u}}{r^2}\, dS\,.$$

Con la forma polare di dS si vede immediatamente che quell' integrale è finito e continuo in tutto lo spazio esterno e interno. All' infinito si annulla come $\frac{1}{r^2}$.

Inoltre, distinguendo gli operatori con l'indice o quando si riferiscono al punto O, e notando che $\operatorname{grad} r = -\operatorname{grad}_0 r$, risulta

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = -\,2\omega^2 \int_S \operatorname{grad}_0 \frac{1}{r} \times \mathbf{u}\, dS = -\,2\omega^2 \int_S \left(\operatorname{div}_0 \frac{\mathbf{u}}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{div}_0 \mathbf{u} \right) dS\,;$$

e, pel teorema della divergenza,

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 2\omega^2 \int_\sigma \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{n}}{r}\, d\sigma + 2\omega^2 \int_S \frac{\operatorname{div}_0 \mathbf{u}}{r}\, dS\,,$$

essendo $\mathbf{n}$ un vettore unitario parallelo alla normale interna a σ; la quale dimostra che $\operatorname{div} \mathbf{w}$ è la somma di due potenziali ordinarii di spazio e di semplice strato. Riferendoci alle proprietà di questi potenziali, si deduce subito che grad div $\mathbf{w}$ è discontinuo attraverso σ, e che la discontinuità è rappresentata da $8\pi w^2(\mathbf{u}\times\mathbf{n})\mathbf{n}$.

Calcoliamo ora la rotazione di w.

Si ha

$$\operatorname{rot}\mathbf{w}=\int_S \operatorname{rot}\gamma\mathbf{u}\,dS=\int_S \operatorname{Rot}\gamma\,.\,\mathbf{u}\,dS\,.$$

Ma

$$\operatorname{Rot}\gamma=2\Omega^2\operatorname{Rot}\frac{1}{r}-(\Omega^2-\omega^2)\operatorname{Rot}\frac{d\operatorname{grad}r}{dP}=2\Omega^2\operatorname{grad}\frac{1}{r}\wedge\,;$$

quindi

$$\operatorname{rot}\mathbf{w}=2\Omega^2\int_S\operatorname{grad}\frac{1}{r}\wedge\mathbf{u}\,dS=-2\Omega^2\int_S\frac{\operatorname{grad}r\wedge\mathbf{u}}{r^2}\,dS\,.$$

Inoltre

$$\operatorname{rot}\mathbf{w}=-2\Omega^2\int_S\operatorname{grad}_0\frac{1}{r}\wedge\mathbf{u}\,dS=-2\Omega^2\int_S\left(\operatorname{rot}_0\frac{\mathbf{u}}{r}-\frac{1}{r}\operatorname{rot}_0\mathbf{u}\right)dS$$

$$=2\Omega^2\int_\sigma\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{n}}{r}\,d\sigma+2\Omega^2\int_S\frac{\operatorname{rot}_0\mathbf{u}}{r}\,dS\,;$$

che sono due potenziali vettori ordinarii di spazio e di semplice strato. E però, riferendoci alle loro proprietà, deduciamo che $\operatorname{rot}\mathbf{w}$ è finito e continuo ovunque, e che invece $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{w}$ prova attraverso σ la discontinuità $2\Omega^2[4\pi\mathbf{u}-4\pi(\mathbf{u}\times\mathbf{n})\mathbf{n}]$.

Da tutto ciò risulta che

$$\mathrm{E}\mathbf{w}=\Omega^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{w}-\omega^2\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{w}$$

prova, attraverso σ, la discontinuità $-8w^2\Omega^2\pi\mathbf{u}$.

Si verifica poi, subito, che all'esterno di S è

$$\mathrm{E}\mathbf{w}=0\,;$$

e allora dalle cose precedenti si deduce che nei punti di S è

$$\mathrm{E}\mathbf{w}=-8\omega^2\Omega^2\pi\mathbf{u}\,;\tag{1'}$$

teorema analogo a quello di Poisson. In conclusione: *il potenziale newtoniano di spazio dell'elasticità è finito e continuo ovunque insieme con la divergenza e con la rotazione; all'esterno di σ soddisfa l'equazione* (1); *all'interno la* (1').

3. Sia ora $\mathbf{u}$ funzione dei soli punti O di σ; e poniamo

$$\mathbf{v}=\int_\sigma\gamma\mathbf{u}\,d\sigma\,,\tag{5}$$

ove γ è sempre la dilatazione definita di sopra. Anche questo $\mathbf{v}$ è un vettore funzione del punto P, finito e continuo ovunque. Sarà chiamato il *potenziale newtoniano di semplice strato dell'elasticità.*

Risulta, come sopra,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 2\omega^2 \int_\sigma \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{u}\, d\sigma .$$

Posto

$$\mathbf{v}' = \int_\sigma \frac{\mathbf{u}}{r}\, d\sigma ,$$

che è un ordinario potenziale-vettore di semplice strato, si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = \int_\sigma \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{u}\, d\sigma ;$$

e quindi

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 2\omega^2 \operatorname{div} \mathbf{v}' .$$

Siccome, per cose note, $\operatorname{div} \mathbf{v}'$ prova, attraverso σ, la discontinuità $4\pi(\mathbf{u} \times \mathbf{n})$, così anche $\operatorname{div} \mathbf{v}$ prova la discontinuità $8\pi w^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{n})$.

Analogamente, risulta, come sopra,

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\Omega^2 \int_\sigma \operatorname{grad} \frac{1}{r} \wedge \mathbf{u}\, d\sigma ;$$

e, per $\mathbf{v}'$, si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}' = \int_\sigma \operatorname{grad} \frac{1}{r} \wedge \mathbf{u}\, d\sigma :$$

dunque

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\mathbf{W}^2 \operatorname{rot} \mathbf{v}' ,$$

Attraverso σ, essendo $4\pi(\mathbf{u} \wedge \mathbf{n})$ la discontinuità di $\operatorname{rot} \mathbf{v}'$, $8\pi\Omega^2(\mathbf{u} \wedge \mathbf{n})$ sarà quella di $\operatorname{rot} \mathbf{v}$.

Poichè

$$\mathrm{E}\mathbf{v} = 2\omega^2\, \Omega^2\, \Delta' \mathbf{v}' ;$$

e, per cose note, $\Delta' \mathbf{v}'$ è nullo ovunque, risulta, in ogni punto dello spazio,

$$\mathrm{E}\mathbf{v} = 0 :$$

Si conclude: *il potenziale newtoniano di semplice strato dell'elasticità è finito e continuo ovunque, e ovunque soddisfa all'equazione* (1); *la divergenza e la rotazione son discontinue attraverso* σ.

4. Consideriamo ancora il potenziale precedente

$$\mathbf{v} = \int_\sigma \gamma \mathbf{u}\, d\sigma ;$$

e diamo ad ogni punto O di σ uno spostamento infinititesimo ε lungo la normale a σ. Otterremo una superficie σ_1 parallela a σ, il cui potenziale sarà

$$\mathbf{v}_1 = \int_{\gamma_1} \gamma_1 \mathbf{u}\, d\sigma .$$

Risulta evidentemente

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v} = \int_\sigma d\gamma \mathbf{u} \,.\, d\sigma = \int_\sigma \frac{d\gamma \mathbf{u}}{dO}\, dO \quad d\sigma .$$

Ma essendo $dO = \varepsilon \mathbf{u}$, si ha ancora

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v} = \int_\sigma \varepsilon \frac{d\gamma \mathbf{u}}{dO}\, \mathbf{u}\, d\sigma = \int_\sigma \left(\frac{d\gamma}{dO}\, \mathbf{u} \right) \varepsilon \mathbf{u}\, d\sigma \tag{0}$$

perchè, rispetto a cotesta differenziazione, l' $\mathbf{u}$ è costante. Possiamo pensare $\mathbf{u}$ grandissimo, per modo che $\varepsilon \mathbf{u}$ risulti finito; e poi scrivere semplicemente $\mathbf{u}$ al posto di $\varepsilon \mathbf{u}$.

Orbene

$$\mathbf{v}_1 = \int_\sigma \left(\frac{d\gamma}{dO}\, \mathbf{u} \right) \mathbf{u}\, d\sigma \tag{5}$$

sarà chiamato il *potenziale newtoniano di doppio strato dell'elasticità*; perchè è il potenziale dell'elasticità relativo a due fogli σ sovrapposti, nei cui punti corrispondenti sono applicati due vettori $\mathbf{u}$ eguali ed opposti; come risulta dalla (0).

Dalla definizione stessa risulta che questo $\mathbf{v}_1$ soddisfa l'equazione (1). Esso è discontinuo attraverso σ; ma lo studio preciso della discontinuità richiede calcoli assai lunghi, che qui omettiamo.

In un'altra Nota mostrerò che questi potenziali sono gli elementi analitici fondamentali della teoria generale dell'elasticità.

Meccanica. — *Sopra una espressiva interpretazione cinematica del principio di relatività*. Nota della sign.$^{\text{na}}$ CLARICE MUNARI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La traduzione matematica del principio di relatività si espiica nella determinazione di un gruppo di trasformazioni puntuali T, fra due quaterne (x, y, z, t) (x', y', z', t') (interpretabili come luogo e tempo d'un fatto determinato rispetto a due riferimenti diversi) dotate di particolari proprietà.

Le proprietà, in base a cui si caratterizzano le T sono state, per la prima volta, discusse da Einstein, il quale, nella celebre Memoria *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Annalen der Physik, 1905), le illustrò dal punto di vista fisico, includendovi in particolare (come fosse necessaria conseguenza dell'omogeneità dello spazio fisico) la condizione di linearità.

Dal punto di vista geometrico, la teoria dell' Einstein fu illustrata da Minkowski [1], con un criterio, si potrebbe dire, fusionista di spazio e di tempo.

Anche il Minkowski ammette però *a priori* la linearità della trasformazione.

Una formulazione fisica e matematica assai soddisfacente si trova nella Memoria di Brill [2].

Egli, partendo dalle medesime premesse di Einstein, si propone di trovare le formule di trasformazione, che ammettono come invarianti tutti i possibili sistemi di onde sferiche (propagantisi con velocità costante c), qualunque sia il centro $(x_0 y_0 z_0)$ e l' istante iniziale t_0 della perturbazione.

Ciò è quanto dire che l'equazione

$$(1) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2=0$$

deve costituire un invariante bipuntuale.

Però anche il Brill, nel procedere alla effettiva ricerca delle T, ne ammette ulteriormente la linearità [3].

In realtà, questa ipotesi complementare è superflua; ciò risulta dall'osservare che l'invarianza della (1) implica in particolare l'invarianza della

$$(2) \qquad dx^2+dy^2+dz^2-c^2\,dt^2=0$$

quando si suppongano le due quaterne infinitamente vicine.

Ora, se la (2) si conserva, basta interpretare le x, y, z, $ict=x_4$ come coordinate di uno spazio S_4 euclideo, ed imporre inoltre alle T, che *in tutto il campo reale*, a valori finiti di x, y, z, t, facciano corrispondere valori pure finiti di x', y', z', t'; per poter facilmente dimostrare, in base alla teoria dei gruppi conformi, che le formule in questione sono lineari.

Di ciò dovrò io pure occuparmi nella presente Nota, la quale (seguendo l'indirizzo delle lezioni tenute lo scorso anno dal prof. Levi-Civita all'Uni-

[1] Minkowski, *Spazio e tempo.* Nuovo Cimento, ser. 5ª, vol. XVIII, 1909. Oppure: Castelnuovo, *Il principio di relatività e i fenomeni ottici.* Scientia, vol. IX, anno V (1911).

[2] Brill, *Das Relativitätsprinzip.* Jahresbericht der deutschen Matematiker. Vereingung, 1912.

[3] A questo proposito rileverò che il sig. Kraft ha assegnato in una recente Memoria (*Ueber die Eingenschaften Linearer Raum-Zeit-Transformationen,* Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, décembre 1912) tutte le trasformazioni fra due quaterne (x, y, z, t) e (x', y', z', t') che, verificando parte dei postulati di Einstein, conservano *ogni* movimento uniforme (qualunque sia la velocità).

Ciò implica la linearità, come rileva il sig. Kraft.

La sua ricerca è però discretamente laboriosa, per deduzioni concettuali e sviluppi di calcolo, e fa direttamente intervenire, accanto alla condizione cinematica suaccennata (già per sè esuberante in quanto contempla tutte le velocità), la geometria relativistica, prescindendo solo dal postulato della costanza della velocità della luce.

versità di Padova) mira a sostituire alle intuizioni ed ipotesi più complesse da cui si fa discendere la forma analitica delle T, quest' unica condizione cinematica che: *un moto rettilineo uniforme con velocità c, si muti per effetto di* T *in un moto pure rettilineo uniforme con velocità c*.

Una tale condizione, oltre all'evidente vantaggio d'avere una forma semplice ed espressiva, costituisce ovviamente la vera traduzione schematica del postulato fisico della costanza della velocità della luce, in quanto, nell'ambito cinematico, i fenomeni luminosi altro non sono, se non casi particolari di movimenti i quali seguono con velocità c, e riescono (con speciali dispositivi) suscettibili di delicato apprezzamento sperimentale.

1. Problema. — *Determinare l'espressione più generale di una trasformazione puntuale fra due quaterne (x, y, z, t), (x', y', z', t'), per effetto della quale si conservano i movimenti uniformi dotati di una assegnata velocità c; ed in tutto il campo reale, a valori finiti di x, y, z, t corrispondano valori finiti di x', y', z', t'.*

Ove giovi per abbreviare la scrittura, indichiamo le x, y, z con x_1, x_2, x_3 e analogamente le x', y', z' con x'_1, x'_2, x'_3.

Le cercate formule di trasformazione siano:

$$\left\{\begin{aligned} x'_r &= f_r(x_1, x_2, x_3, t) \qquad (r = 1, 2, 3), \\ t' &= \mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, t) \end{aligned}\right. \tag{1}$$

colle conseguenti relazioni fra i differenziali delle due quaterne:

$$\left\{\begin{aligned} dx'_r &= \frac{\partial f_r}{\partial t}\, dt + \sum_1^3{}_s \frac{\partial f_r}{\partial x_s}\, dx_s, \\ dt' &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}\, dt + \sum_1^3{}_s \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_s}\, dx_s. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Mediante le (1), ad ogni moto $\mathfrak{M}$ definito dalle equazioni

$$x_s = \varphi_s(t) \qquad (s = 1, 2, 3)$$

fa riscontro una curva dello spazio x', y', z', t' (risultando x', y', z', t' espressi in funzione del parametro t). Questa curva sarà essa pure interpretabile come un movimento $\mathfrak{M}'$, a patto che dall'ultima delle (1) [in cui si ponga $x_s = \varphi_s(t)$]

$$t' = \mathrm{F}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t)$$

si possa ricavare t in termini di t'. Di ciò si è assicurati se

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\dot{z}$$

riesce diverso da zero per il movimento $\mathfrak{M}$.

2. Per ipotesi, ogni qualvolta $\mathfrak{M}$ è rettilineo uniforme ed ha la velocità c, lo stesso deve accadere per $\mathfrak{M}'$. Ciò si può anche esprimere dicendo che, dall'essere per un *generico moto rettilineo uniforme*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 = 0 \tag{3}$$

segue che si ha, nel sistema trasformato, un moto *pure rettilineo uniforme*, per cui

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2\,dt'^2 = 0\,. \tag{3'}$$

Dico che posso risguardare, nel discutere le conseguenze dell'ipotesi [che (3') scende da (3) in virtù delle formule di trasformazione (1), (2)], $x, y, z, t, dx, dy, dz, dt$, come quantità legate dalla sola (3), ossia che posso attribuire a 7 di queste quantità, valori numerici arbitrari, purchè l'8° si intenda ricavato dalla (3) stessa.

Ciò risulta ovviamente dal riflettere che, scelti a piacimento 8 valori numerici sotto la indicata restrizione, e quindi del tipo

$$x_0\,,\, y_0\,,\, z_0\,,\, t_0\,,\, dx_0 = c\alpha\, dt_0\,,\, dy_0 = c\beta\, dt_0\,,\, dz_0 = c\gamma\, dt_0$$

(con α, β, γ coseni di direzione) esiste effettivamente un moto rettilineo uniforme, per cui nell'istante t_0 il mobile occupa la posizione x_0, y_0, z_0, ed è animato da velocità c nella direzione α, β, γ.

3. Ora, sfruttando le (2), si ha:
$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2\,dt'^2 =$ forma quadratica nei differenziali delle primitive variabili x, y, z, t, a coefficienti che dipendono esclusivamente da x, y, z, t.

Dovendo la (3') essere conseguenza della sola (3), ne consegue la *identità*

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c\,dt'^2 \equiv \lambda\,(dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2)$$

dove λ è funzione delle sole coordinate.

Pongo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,, \qquad ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2\,;$$

con ciò la nostra identità assume l'aspetto

$$ds'^2 - c^2\,dt'^2 \equiv \lambda\,(ds^2 - c^2\,dt^2)\,. \tag{4}$$

Riferiamoci a determinazioni delle $x, y, z, t, dx, dy, dz, dt$, per cui *non* sia $ds^2 - c^2\,dt^2 \equiv 0$, e indichiamo per comodità e uniformità di notazione, i $c\,t$ con x_4, i $c\,t'$ con x'_4.

La (4) può allora scriversi

$$\sum_1^4{}_i\, dx_i'^2 \equiv \lambda \sum_1^4{}_i\, dx_i^2\,, \tag{4'}$$

e mette in evidenza che, fra le quaterne x_i, x'_i, interpretate come coordinate di uno spazio S_4 euclideo, passa una trasformazione conforme.

Ora il teorema di Liouville [1] dice che:

Le più generali trasformazioni conformi dello spazio euclideo di $n > 2$ dimensioni in se stesso, si ottengono combinando le inversioni per raggi vettori reciproci, coi movimenti e colle similitudini.

Da questo teorema risulta, che la nostra trasformazione sarà: o *lineare*, ovvero prodotto di trasformazioni lineari con una *inversione per raggi vettori reciproci*.

Alla condizione poi, imposta alle T, di far corrispondere, in tutto il campo reale, a valori finiti di x, y, z, t, valori finiti di x', y', z', t', soltanto le trasformazioni lineari soddisfano; possiamo così concludere, che l'espressione più generale delle formule cercate è

$$x'_i = a_i + \sum_1^4{}_j\, a_{ij}\, x_j \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{5}$$

le a essendo costanti, e il determinante D dei coefficienti a_{ij} diverso da zero. Essendo λ il moltiplicatore (necessariamente costante) che, a norma della (4'), compete alla (5), pongasi

$$x_i^\star = \sum{}_j \frac{a_{ij}}{\sqrt{\lambda}}\, x_j, \tag{6}$$

$$x''_i = \sqrt{\lambda}\, x_i^\star, \tag{7}$$

$$x'_i = a_i + x''_i. \tag{8}$$

La (5) può manifestamente risguardarsi come prodotto delle tre sostituzioni lineari (6), (7), (8).

Dalle due ultime si ha

$$dx'_i = \sqrt{\lambda}\, dx_i^\star,$$

talchè la (4') equivale a

$$\sum_1^4{}_i\, dx_i^{\star 2} = \sum_1^4{}_i\, dx_i^2. \tag{9}$$

La (9) mostra che la (6) è un moto rigido dello spazio euclideo S_4, più precisamente anzi (siccome l'origine $x_i = 0$ rimane fissa) una rotazione rigida attorno all'origine: quindi (nel campo reale x, y, z, t; x', y', z', t') una *trasformazione di Lorentz* [2].

[1] Cfr. per es. Bianchi, *Geometria differenziale*, vol. I, § 170.

[2] Cfr. in particolare, Marcolongo, *Sugli integrali delle equazioni dell'elettrodinamica*, in questi Rendiconti, vol. XV (1° semestre 1906).

Le (7) ed (8) interpretate nel campo x, y, z, t corrispondono manifestamente: la prima ad una trasformazione moltiplicativa, che opera egualmente sulle coordinate di spazio e su t, e lascia quindi inalterate le velocità; (quale per es. risulta da cambiamenti delle unità di lunghezza e di tempo vincolati alla condizione di non influire sulla misura delle velocità); la seconda ad un arbitrario spostamento dell'origine del sistema di riferimento, e dell'origine dei tempi.

Come si vede, le T coincidono essenzialmente (a meno cioè di trasformazioni elementari, *a priori* evidenti) colle trasformazioni di Lorentz. Nella loro totalità (in quanto cioè si combinino anche colle sopraddette trasformazioni elementari), esse costituiscono un gruppo lineare ∞^{11}.

4. Prescindendo dalla restrizione, che a valori finiti della quaterna x_i, corrispondano valori pure finiti della quaterna x'_i, possiamo facilmente vedere, che non soltanto le ∞^{11} trasformazioni (5), ma anche una generica trasformazione del gruppo conforme (∞^{15}, nel caso nostro di un S_4 euclideo), conserva i moti uniformi con velocità c.

Invero, sia $\mathfrak{M}$ un moto rettilineo uniforme con velocità c; e sia T una trasformazione del gruppo conforme. Se questa si riduce ad un movimento, o ad una similitudine, ricadiamo nell'ambito delle trasformazioni lineari.

Escluso tale caso particolare, si può sempre, come è ben noto, risguardare la T come prodotto di trasformazioni lineari [verificanti tutte la (4') e quindi la voluta condizione cinematica] per una inversione rappresentata sotto la forma tipica

$$(10)\qquad x'_i = \frac{x_i}{r^2} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

con

$$r^2 = \sum_1^4{}_i\, x_i^2 .$$

Tutto si riduce quindi a far vedere che tale inversione conserva i moti rettilinei uniformi con velocità c.

Poichè le (10) rimangono invariate, quando si fa subire a *entrambi* i triedri $Oxyz$, $O'x'y'z'$ una *qualsiasi* rotazione, possiamo, senza pregiudizio della generalità, supporre che il triedro $Oxyz$ sia orientato in modo che il piano Oxy contenga la retta sede del movimento $\mathfrak{M}$, e l'asse Ox risulti ad essa parallelo.

Allora le equazioni che definiscono il moto, rispetto al triedro $Oxyz$, sono

$$\begin{cases} x = a + ct, \\ y = b, \end{cases}$$

e passando dalle x_i alle x'_i per mezzo delle (10), abbiamo:

$$(11)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{a+ct}{a^2+b^2+2act}, \\ y' = \dfrac{b}{a^2+b^2+2act}, \\ t' = \dfrac{t}{a^2+b^2+2act}. \end{cases}$$

Dall'eliminazione di t fra le (11) risulta il moto corrispondente, definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\, ct', \\ y' = \dfrac{b}{a^2+b^2} - \dfrac{2ab}{a^2+b^2}\, ct', \end{cases}$$

le quali dicono che $\mathfrak{M}'$ è rettilineo uniforme, e segue ancora con velocità c.

Vediamo dunque che abbiamo bensì un gruppo ∞^{15} di trasformazioni, che conservano i movimenti uniformi con velocità c, ma non è rispettata la condizione qualitativa che rimanga sempre finita la corrispondenza nel campo reale: così per es. le nostre formole (11) ove a e b si facciano entrambi convergere a zero, dànno $x' = \infty$ per un generico valore di t.

Astronomia pratica. — *Sulla correzione di run alle letture dei cerchi graduati fatte col microscopio micrometrico.* Nota di G. Silva, presentata dal Socio Millosevich.

1. In una Nota pubblicata in questi Rendiconti (¹) il prof. G. A. Favaro, riassumendo quanto altri autori avevano già esposto sull'argomento indicato dal titolo qui sopra scritto, aggiungeva alcune considerazioni alle quali era stato condotto prendendo in esame la questione. Ricordava egli in particolare che nel determinare la cosidetta *correzione di run* può essere seguito o il metodo del *run medio*, o quello del *run* da lui chiamato *attuale*, e si soffermava specialmente su questo secondo metodo per svolgere qualche procedimento di calcolo e per concludere con alcuni consigli pratici. Mi parve cosa di qualche interesse approfondire la questione della scelta dell'uno o dell'altro metodo, questione che mi si era già presentata altra volta studiando uno strumento universale, e qui esporrò il risultato al quale giunsi in questa particolare ricerca.

(¹) *Sulle correzioni alle letture dei cerchi*, ecc. Rendiconti, vol. XXII, serie 5ª, 2° sem. 1913, pag. 209.