ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

e passando dalle x_i alle x'_i per mezzo delle (10), abbiamo:

$$
(11) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{a + ct}{a^2 + b^2 + 2act}, \\[2ex] y' = \dfrac{b}{a^2 + b^2 + 2act}, \\[2ex] t' = \dfrac{t}{a^2 + b^2 + 2act}. \end{cases}
$$

Dall'eliminazione di t fra le (11) risulta il moto corrispondente, definito dalle equazioni

$$
\begin{cases} x' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} ct', \\[2ex] y' = \dfrac{b}{a^2 + b^2} - \dfrac{2ab}{a^2 + b^2} ct', \end{cases}
$$

le quali dicono che $\mathcal{M}'$ è rettilineo uniforme, e segue ancora con velocità c.

Vediamo dunque che abbiamo bensì un gruppo ∞^{15} di trasformazioni, che conservano i movimenti uniformi con velocità c, ma non è rispettata la condizione qualitativa che rimanga sempre finita la corrispondenza nel campo reale: così per es. le nostre formole (11) ove a e b si facciano entrambi convergere a zero, dànno $x' = \infty$ per un generico valore di t.

Astronomia pratica. — *Sulla correzione di run alle letture dei cerchi graduati fatte col microscopio micrometrico.* Nota di G. Silva, presentata dal Socio Millosevich.

1. In una Nota pubblicata in questi Rendiconti [1] il prof. G. A. Favaro, riassumendo quanto altri autori avevano già esposto sull'argomento indicato dal titolo qui sopra scritto, aggiungeva alcune considerazioni alle quali era stato condotto prendendo in esame la questione. Ricordava egli in particolare che nel determinare la cosidetta *correzione di run* può essere seguito o il metodo del *run medio*, o quello del *run* da lui chiamato *attuale*, e si soffermava specialmente su questo secondo metodo per svolgere qualche procedimento di calcolo e per concludere con alcuni consigli pratici. Mi parve cosa di qualche interesse approfondire la questione della scelta dell'uno o dell'altro metodo, questione che mi si era già presentata altra volta studiando uno strumento universale, e qui esporrò il risultato al quale giunsi in questa particolare ricerca.

[1] *Sulle correzioni alle letture dei cerchi*, ecc. Rendiconti, vol. XXII, serie 5ª, 2° sem. 1913, pag. 209.

2. Sieno A e $A+F$ i due tratti consecutivi della graduazione, tra i quali cade lo *zero micrometrico* o *linea di fede* del microscopio; con A intenderò anche quel numero di gradi e primi d'arco che corrisponde al tratto precedente, e con F il numero di secondi d'arco compresi fra due tratti successivi della graduazione. Sieno l_1 ed l_2 le letture al microscopio ([1]), fatte portando il doppio filo mobile a collimare rispettivamente i tratti A e $A+F$, e si supponga che nel movimento del filo mobile dal tratto $A+F$ allo zero micrometrico, e da questo al tratto A le letture sul tamburo della vite micrometrica vadano crescendo. Sia in fine F' quel numero di parti, multiplo del numero delle parti contenute in una intera o in una mezza rivoluzione, che *a microscopio esattamente aggiustato* corrisponde a un intervallo di F secondi del cerchio; generalmente F' è eguale ad F o alla sua metà. In pratica ad un intervallo di F secondi, invece di F', corrisponderanno $F'+r$ parti ed r sarà il cosidetto *run*.

Supposto che le letture l_1 ed l_2 sieno state fatte su due tratti della graduazione esattamente distanti di F *secondi, con un microscopio perfetto* (anche se non esattamente aggiustato per quanto riguarda la sua distanza dal cerchio), *senza alcun errore personale di collimazione e di lettura*, il valore esatto del *run* relativo alla particolare posizione del microscopio, è $r=l_1-l_2$, e il valore p di una parte del microscopio, in secondi, sarà:

$$p=\frac{F}{F'+r}=\frac{F}{F'}\left(1-\frac{r}{F'+r}\right).$$

Nella precedente ipotesi le *esatte* distanze della linea di fede del microscopio dai tratti della graduazione precedente e seguente, espresse in parti, sono l_1 e $F'-l_2$; quindi la lettura del cerchio che deriva dalle due letture l_1, l_2, separatamente o insieme considerate, può scriversi sotto una qualunque delle forme

$$\text{(1)}\qquad L=A+\frac{Fl_1}{F'+r}=A+\frac{F}{F'}\left[l_1-l_1\frac{r}{F'+r}\right]$$

$$\text{(2)}\qquad L=A+F-\frac{(F'-l_2)\,F}{F'+r}=A+\frac{F}{F'}\left[l_2+(F'-l_2)\frac{r}{F'+r}\right]$$

$$\text{(3)}\qquad L=A+\frac{F}{F'}\left[\frac{l_1+l_2}{2}+\left(\frac{F'}{2}-\frac{l_1+l_2}{2}\right)\frac{r}{F'+r}\right]$$

([1]) Per prima lettura l_1 si deve intendere, come è noto, la somma della lettura a_1 effettivamente fatta sul tamburo della vite micrometrica quando si collima il tratto A, e del numero che risulta moltiplicando le intere (o mezze) rivoluzioni compiute dalla vite stessa per il numero, generalmente 60, delle parti in cui è diviso l'intero giro del tamburo (o per quello, generalmente 30, delle parti in cui è divisa ciascuna delle metà del algebricamente identiche, come è facile verificare, ponendo $l_1 - l_2$ in luogo di r.

3. In pratica, per non essere soddisfatta la ipotesi sopra ammessa, le letture l_1 ed l_2 sono affette da errori e la lettura L del cerchio può essere allora calcolata o trascurando l'errore di *run*, o in uno dei due modi seguenti.

I) *Metodo del run medio.* — Da più coppie di letture l_1, l_2 fatte al microscopio nelle varie letture del cerchio di una serie di osservazioni si deducono più valori $l_1 - l_2$ del *run*, e se ne fa la media r. Sostituendo questa nella (1) e nella (2) si hanno due valori di L, indipendenti tra loro e generalmente non coincidenti; si adotta perciò come lettura del cerchio la loro media che ha l'espressione (3). Questa è, sotto forma molto più concisa, la espressione trovata dal Weineck [1] e, per $F = F'$ (nel qual caso una parte corrisponde a 1 secondo d'arco), il secondo termine di L nella (3), coincide con l'espressione data dall'Albrecht [2], ove si tenga conto della differenza del segno di r. Trascurando nella (3) i termini di secondo ordine in r, essa può essere scritta anche sotto la forma

$$L_1 = A + \frac{F}{F'}\frac{l_1 + l_2}{2} + \frac{F}{F'}\left(\frac{1}{2} - \frac{l_1 + l_2}{2F'}\right) r . \tag{4}$$

Salvo le differenti notazioni, a questa stessa forma, nel caso di $F = F'$, giunge lo Jordan nelle più recenti edizioni del suo *Handbuch der Vermessungskunde* [3].

II) *Metodo del run attuale.* — Se si adotta per r il *run* attuale, cioè la differenza $l_1 - l_2$ osservata nella stessa lettura del cerchio che si tratta di calcolare, si ha allora la lettura L sotto una qualunque delle formole (1), (2), (3) tra loro identiche, come si è detto, quando vi si metta $l_1 - l_2$ in luogo di r. La stessa L può assumere anche altre espressioni, sempre identiche algebricamente alle precedenti, come, ad esempio, la seguente che

---

tamburo). E per seconda lettura l_2 si deve intendere analogamente il numero di parti che si ottiene addizionando allo stesso prodotto la lettura a_2 fatta sul tamburo della vite micrometrica allorchè si collima il secondo tratto della graduazione $A + F$. In pratica questo piccolo calcolo di l_1 ed l_2 non viene fatto, poichè dal numero di rivoluzioni si ottengono senz'altro i minuti primi, e dalle letture effettive a_1 a_2 i minuti secondi.

(1) *Der Mikroskop-Run.* Astr. Nachr. N. 2605, Bd. 109.

(2) *Formeln und Hilfstafeln,* 1908, pag. 49.

(3) Cfr. vol. II, 3ª edizione, 1888, pag. 151 e 4ª ediz., 1908, pag. 240. Nella 2ª edizione (1877, vol. I, pag. 229) lo Jordan indicava invece con un esempio numerico il metodo del *run* attuale.

si può ottenere dalla (1) riducendo i termini entro la parentesi quadrata dell'ultimo membro allo stesso denominatore e semplificando

$$L = A + \frac{F}{F'}\,\frac{(F'-l_2)\,l_1 + l_1\,l_2}{(F'-l_2)+l_1}\,.$$

Questa esprime che, *quando per il run si assume la differenza delle due letture osservate ai microscopi (run attuale), queste, nel calcolo della lettura del cerchio, hanno peso inversamente proporzionale alla distanza della linea di fede dal tratto della graduazione al quale si riferiscono* (1).

Per il calcolo pratico di L si possono trascurare i termini di secondo ordine nella quantità di primo ordine $r = l_1 - l_2$, e in tal caso si ottiene per L, ad es. dalla (3),

$$(5)\qquad L_{II} = A + \frac{F}{F'}\,\frac{l_1+l_2}{2} + \frac{F}{F'}\left(\frac{1}{2} - \frac{l_1+l_2}{2F'}\right)(l_1-l_2)\,.$$

Nel caso di $F = 2F'$ il terzo termine di questa formola è la correzione $\Delta(l_1+l_2)$ da applicare alla somma delle due letture $l_1 + l_2$, già indicata dal Lorenzoni (2).

Nelle formole (4) e (5) i due primi termini, identici in entrambe, dànno la lettura del cerchio senza tener conto della correzione del *run*, il terzo termine, che differisce nelle due formole solo per l'ultimo fattore (che è il *run* medio nella prima e il *run* attuale nella seconda) dà la correzione di *run*.

4. L'errore sistematico della graduazione, comune a più tratti consecutivi, per il quale questi tratti sono tutti spostati in uno stesso senso rispetto alla esatta posizione che dovrebbero avere, rimane per intero nella lettura L, tanto se questa è calcolata col metodo del *run* medio, quanto se è calcolata con quello del *run* attuale. Prescindendo da questo errore sistematico considero i seguenti errori: errori accidentali di graduazione per i quali gli intervalli fra tratti consecutivi possono essere alquanto differenti tra loro, e dal valore F che dovrebbero avere; errori dovuti alle imperfezioni del microscopio e in particolare a quelle della sua vite micrometrica e della divisione del tamburo di questa; errori personali di collimazione e di let-

(1) Segue immediatamente da questa proposizione che quando l_1 ed l_2 sono eguali a circa la metà di F', la precisione della lettura micrometrica è quella della media di due puntate (l_1 ed l_2); quando invece l_1 ed l_2 sono circa 0 o F', la precisione della lettura micrometrica è quella di una sola puntata. Nei casi estremi, se $l_1 = 0$, la lettura L del cerchio è uguale ad A, qualunque sia la lettura l_2 al secondo tratto della graduazione, e se $l_2 = F'$, la lettura del cerchio è eguale ad $A + F$ qualunque sia la lettura l_1 al primo tratto.

(2) *Determinazioni di azimut*, ecc. Pubbl. della R. Comm. Geod. It. Padova, 1891.

tura al microscopio. Si supponga determinato l'error medio μ del *run* attuale $l_1 - l_2$ dovuto a questi errori; l'error medio di l_1 o di l_2 sarà $\varepsilon_l = \mu : \sqrt{2}$ e da questo error medio sarà facile dedurre quello di una lettura L_{II} calcalcolata col metodo del *run* attuale.

Per dedurre l'analogo error medio di una lettura L_I calcolata col metodo del *run* medio, oltre all'errore medio ε_l di l_1 e l_2, occorre conoscere quello ε_r di r. Ora r è la media di un certo numero n di valori del *run* e l'error medio di essa, in causa degli errori sopra accennati, è $\mu : \sqrt{n}$. Ma i singoli valori del *run* non differiscono tra loro e dalla loro media solo per gli errori suddetti, ma anche per le eventuali variazioni che può subire la distanza reciproca tra microscopio e lembo nelle successive letture, o per altri errori che intervengono solo al variare delle posizioni del microscopio rispetto al cerchio. Sia ν l'error medio di un valore del *run* dovuto a questo secondo tipo di cause di errore. Introducendo nel calcolo di L_I il *run* medio, che corrisponde a una posizione media del microscopio rispetto al lembo, in luogo del *run* esatto attuale (incognito) relativo alla particolare posizione del microscopio nella lettura del cerchio che si considera, si commette quindi su r un errore dell'ordine degli scostamenti dei valori attuali del *run*, supposti privi degli errori di primo tipo, dalla loro media, scostamenti dai quali si dovrebbe dedurre, qualora fossero noti, l'error medio ν. In conclusione l'error medio ε_r del *run* medio, introdotto nella (4) per calcolare una determinata lettura, è l'insieme di due parti, e precisamente si ha

$$\varepsilon_r^2 = \mu^2 : n + \nu^2 .$$

Si applichi ora alla (4) nel caso del *run* medio e alla (5) nel caso del *run* attuale il teorema che permette di dedurre l'error medio di una funzione di più grandezze quando sono noti gli errori medî di queste grandezze; si trascurino le potenze superiori alla seconda di $\varepsilon_l, \varepsilon_r, r, l_1 - l_2$, e si otterranno gli errori medî M_I^2 ed M_{II}^2 di una lettura L, a seconda che è calcolata col metodo del *run* medio o con quello del *run* attuale, dalle relazioni

$$M_I^2 = \left(\frac{\partial L_I}{\partial l_1}\right)^2 \varepsilon_l^2 + \left(\frac{\partial L_I}{\partial l_2}\right)^2 \varepsilon_l^2 + \left(\frac{\partial L_I}{\partial r}\right)^2 \varepsilon_r^2 =$$

$$= \frac{F^2}{F'^2}\left[\frac{\varepsilon_l^2}{4} + \frac{\varepsilon_l^2}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{l_1 + l_2}{2F'}\right)^2 \varepsilon_r^2\right]$$

$$M_{II} = \left(\frac{\partial L_{II}}{\partial l_1}\right)^2 \varepsilon_l^2 + \left(\frac{\partial L_{II}}{\partial l_2}\right)^2 \varepsilon_l^2 = \frac{F^2}{F'^2}\left[\left(1 - \frac{l_1 + l_2}{2F'}\right)^2 \varepsilon_l^2 + \left(\frac{l_1 + l_2}{2F'}\right)^2 \varepsilon_l^2\right].$$

Il fattore $F^2 : F'^2$ serve solo a trasformare il quadrato (contenuto fra le parentesi quadre) dell'error medio m espresso in parti, in quello dell'errore medio M espresso in secondi. Determinando m_{I}, m_{II} in parti, in luogo di M_{I}, M_{II}, sostituendo a ε_l^2 e ε_r^2 i loro valori e ponendo

$$x = \frac{l_1 + l_2}{2\,\mathrm{F}'}$$

si ha

$$m_{\mathrm{I}}^2 = \frac{\mu^2}{4} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \left(\frac{\mu^2}{n} + \nu^2\right)$$

$$m_{\mathrm{II}}^2 = (1-x)^2\,\frac{\mu^2}{2} + x^2\,\frac{\mu^2}{2} = \frac{\mu^2}{4} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \mu^2 .$$

I due errori medî sono funzioni di x che può variare da 0 ad 1 al variare della posizione dello zero micrometrico rispetto ai due tratti della graduazione che lo comprendono. Il minimo di m_{I}^2 ed m_{II}^2 si ha per $x = \frac{1}{2}$, ed è uguale a $\frac{\mu^2}{4}$ in tutti e due i casi. Fuori del minimo è sempre

$$m_{\mathrm{I}}^2 \lesseqgtr m_{\mathrm{II}}^2 \quad \text{a seconda che} \quad \nu^2 \lesseqgtr \mu^2\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Se il numero n è sufficientemente grande, $1:n$ si può trascurare rispetto all'unità, e si può allora concludere che *quando si ritenga utile tener conto della correzione di run è* (*teoricamente*) *preferibile adottare il metodo del run medio piuttosto che quello del run attuale, o viceversa, a seconda che l'error medio ν di un valore del run dovuto essenzialmente alle variazioni di distanza del microscopio dal cerchio è minore, o maggiore, dell'error medio μ di un valore dovuto alle ineguaglianze degli intervalli fra tratti consecutivi della graduazione, alle imperfezioni del microscopio e agli errori personali di collimazione e di lettura.*

5. Per l'applicazione pratica di questo criterio teorico si può notare quanto segue. Spesso, nel caso di cerchi graduati di non grande diametro, gli errori personali di collimazione e di lettura sono dello stesso ordine di tutti gli altri errori insieme considerati [1], compresi quelli dovuti alla variabile posizione del microscopio rispetto al lembo; impropriamente l'insieme di tutti questi altri errori è detto da taluno errore accidentale di graduazione. In tali casi il metodo del *run* medio è certo preferibile a quello del *run* attuale.

In caso diverso, per la determinazione approssimata di μ e ν, si può seguire il metodo seguente. Si determini una serie di h valori del *run* rela-

(1) Cfr. A. Venturi, *Azimut di Monte Alfano*, ecc. Pubbl. della Comm. Geod. Ital. Palermo, 1892; V. Reina, *Azimut assoluto di Monte Cavo*, ecc. Idem, Padova, 1894; G. Silva, *Lo strumento universale « Bamberg »*, ecc. Atti del R. Istituto Veneto di S. L. A., vol. LXX, 1910-11, pag. 1411.

tivi agli h intervalli fra $h+1$ tratti consecutivi della graduazione, per esempio quelli contenuti in un grado, avendo cura di far ruotare il microscopio rispetto al cerchio, o questo rispetto a quello con l'apposita vite dei piccoli movimenti. La stessa operazione si ripeta in k regioni del cerchio, distribuite uniformemente sull' intera circonferenza, o meglio su quella sola parte di essa che viene adoperata nelle osservazioni a cui serve lo strumento. Si facciano gli scostamenti degli h valori di ciascuna serie dalla loro media, e da essi si deduca l'error medio di un valore che sarà molto approssimativamente μ, inquantochè si può ritenere che con le opportune cautele nelle osservazioni il microscopio non si sia allontanato dal cerchio, o avvicinato ad esso durante una stessa serie; indi si facciano gli scostamenti delle medie delle k serie dalla media generale, e si determini l'error medio ν_1 della media di una serie; si avrà allora ν dalla relazione

$$\nu^2 = \nu_1^2 - \frac{\mu^2}{h}$$

6. All'atto pratico gioverà tener conto anche della maggior brevità del metodo del *run* medio rispetto a quello del *run* attuale. Per questo si usano ordinariamente tabelle a due argomenti, o, se viene usata per maggiore semplicità una tabella ad un solo argomento, questa non dà direttamente la correzione di *run*; al metodo del *run* medio possono bastare invece le ordinarie tavole di moltiplicazione. Si noti infatti che l'ultimo termine della (4) si può scomporre in due fattori, l'uno costante per tutte le letture del cerchio di una serie di osservazioni, l'altro variabile da una lettura all'altra, per es. si può considerare come costante il fattore $\frac{r}{F'}$, e come variabile, da $+\frac{F}{2}$ a $-\frac{F}{2}$, l'altro fattore $\frac{F}{2} - \frac{F}{F'}\frac{l_1 + l_2}{2}$, che è la differenza tra $\frac{F}{2}$ e la lettura del microscopio non corretta per il *run* [il secondo termine della (4)]. Per fissare meglio le idee supponiamo il cerchio diviso di 3 in 3 primi, $F' = F = 180$. Ai valori

$$\begin{array}{cccc} +1 & +2 & \ldots\ldots & +89 & +90 \\ -1 & -2 & \ldots\ldots & -89 & -90 \end{array}$$

del fattore variabile corrispondono i valori

$$\begin{array}{cccc} 1'29'' & 1'28'' & \ldots\ldots & 0'1'' & 0'0'' \\ 1'31'' & 1'32'' & \ldots\ldots & 2'59'' & 3'0'' \end{array}$$

della lettura del microscopio non corretta per il *run*. Trascriviamo questi rispettivamente alla destra e alla sinistra di un foro rettangolare tagliato in un cartoncino per modo che, sovrapposto il cartoncino ad una tavola di moltiplicazione, apparisca nel foro la sola colonna che contiene i prodotti del fattore costante $\left|\dfrac{r}{F'}\right|$ per i successivi numeri interi 1, 2, 3, ... 90 e altresì in modo che i corrispondenti valori della lettura non corretti per il *run*, scritti qui sopra, vengano a trovarsi a fianco dei detti prodotti. Questi, col debito segno, saranno senz'altro le correzioni di *run* alle letture corrispondenti.

La scomposizione suddetta in un fattore costante e in uno variabile può essere fatta in varî modi a seconda dei differenti casi; nella mia Nota *Lo strumento universale « Bamberg »*, ecc. (citata più indietro) ne ho già dato un altro esempio.

1′ 29″		1′ 31″
1 28		1 32
1 27		1 3[illegible]
0 2		2 58
0 1		2 59
0 0		3 0

Nella stessa Nota feci pure osservare che se i due microscopî ordinariamente usati nelle letture dei cerchi sono bene rettificati, cosicchè le letture l_1, l_2 fatte su uno di essi sieno molto prossime a quelle l'_1, l'_2 fatte sull'altro, si può dedurre in una sola volta la correzione di *run* alla media delle due letture del cerchio eseguite con i due microscopî, anzichè le due correzioni separate: ciò rende il metodo di calcolo del *run* medio notevolmente più breve di quello del *run* attuale.