ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Geometria. — *Sulla equivalenza per traslazione.* Nota del prof. G. **Vacca**, presentata dal Socio V. **Volterra**.

Grazie ad alcune osservazioni del prof. Eugenio Elia Levi, posso esporre per una via più semplice e più breve gli stessi risultati contenuti nella Nota del 9 novembre 1913 (vol. XXII, pag. 417), e togliere la condizione restrittiva che allora era occorsa nelle dimostrazioni.

Aggiungerò in fine la estensione ai poliedri della *equivalenza per traslazione*, chiamando, per brevità, *equivalenti per traslazione* due poligoni rettilinei in uno stesso piano, ovvero due poliedri rispettivamente, quando si possono decomporre in un numero finito di poligoni, ovvero di poliedri, parziali, sovrapponibili per traslazione.

1. Dato un insieme di vettori, si può considerare una nuova specie di somma, che chiameremo *somma orientata* dell'insieme. Essa coincide con la somma ordinaria, soltanto se i vettori considerati hanno la stessa direzione, ma se non l'hanno, la somma orientata dei vettori è il complesso dei vettori che si ottengono, dopo aver eseguito tutte le possibili somme di vettori aventi la stessa direzione, ed appartenenti all'insieme considerato.

L'operazione di *somma orientata*, eseguita sopra un insieme di vettori, riproduce quindi un insieme di vettori (che può ridursi talvolta ad un vettore unico, od anche essere nulla).

2. Si ha allora il teorema [1]:

Perchè due dati poligoni di egual area, nello stesso piano, siano decomponibili in un numero finito di parti eguali per traslazione, è necessario che sia eguale la somma orientata dei vettori dei lati dei due poligoni, quando questi lati siano immaginati percorsi nello stesso senso.

Infatti, immaginata possibile, ed eseguita, la decomposizione dei due poligoni dati, ed immaginati tutti i contorni dei poligoni parziali, percorsi nello stesso senso, in ognuna delle due decomposizioni, sarà nulla la somma dei vettori dei lati interni ai due poligoni dati, poichè ogni lato di un poligono parziale è percorso in due versi opposti, secondo che lo si consideri come appartenente all'uno o all'altro dei due poligoni parziali adiacenti. Quindi la somma orientata dei vettori di tutti i lati di tutti i poligoni parziali (immaginati tutti percorsi nello stesso senso per ogni poligono), in ciascuna delle due decomposizioni, si riduce a quella dei vettori dei lati dei due poligoni dati; c. v. d.

3. Quindi è possibile, applicando questo teorema, decomporre due parallelogrammi equivalenti in un numero finito di parti eguali per traslazione,

[1] È questo il teorema comunicatomi, sotto altra forma, dal prof. Levi.

perchè la somma orientata dei vettori dei lati di qualsivoglia parallelogrammo è nulla.

È invece impossibile il decomporre in tal modo un triangolo ed il suo simmetrico rispetto al vertice, perchè, immaginandoli entrambi percorsi nello stesso verso, la somma orientata dei vettori dei lati dell'uno non è nulla, ed è essenzialmente diversa (anzi l'opposta) da quella dell'altro [1].

4. Possiamo ora estendere allo spazio queste considerazioni, osservando che ai lati di un poligono corrispondono, in certo modo, le faccie di un poliedro.

Converrà dapprima, dato un poliedro, distinguere per ogni sua faccia il verso, che sarà quello della normale interna al poliedro, ed attribuire poi ad ogni faccia un segno, in modo tale che due faccie parallele, ma di verso opposto, abbiano segno contrario. Ciò può farsi ad arbitrio. Per fissar le idee, supporremo positive le faccie tali che la loro normale interna faccia un angolo acuto con una direzione fissa; negative quelle che fanno un angolo ottuso, ecc.

Potremo allora considerare un certo ente, che chiameremo *somma orientata* delle faccie di uno o più poliedri, il quale coincide coll'insieme delle faccie stesse, col loro segno, quando nell'insieme non vi siano faccie parallele. Ma quando esso contiene più faccie parallele, ad esse sostituiremo un poligono avente la stessa giacitura ed avente per area la somma algebrica delle aree delle faccie parallele, considerate col loro segno.

Così, ad esempio, la somma orientata delle faccie di un parallelepipedo è sempre nulla.

5. Abbiamo allora il teorema:

Condizione necessaria affinchè due poliedri di egual volume siano decomponibili in poliedri parziali eguali per traslazione, è che sia eguale la somma orientata delle loro faccie.

Infatti, immaginata possibile, ed eseguita, in ciascuno dei due poliedri, la decomposizione in poliedri parziali, la somma orientata di tutte le faccie di tutti i poliedri parziali, in ciascuno dei due poliedri dati, si riduce a quella delle faccie del poliedro totale, essendo nulla quella delle faccie (o parti di faccie) comuni a due poliedri parziali adiacenti. c. v. d.

Applicando questo teorema, si vede che, mentre è possibile di decomporre in un numero finito di parti eguali per traslazione due parallelepipedi, è invece impossibile di far ciò per due piramidi simmetriche rispetto alla base; ecc.

[1] Con lo stesso metodo il prof. Levi ha altresì osservato che due pentagoni simmetrici non sono equivalenti per traslazione, ecc.