

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

questo modo risulta costantemente un po' inferiore a quello ricavato titolando all'aria libera l'acido cloridrico contro la barite di circa 0,054 gr. eq. Ba(OH)<sub>2</sub> in cifra assoluta. Tale differenza resta immodificata aggiungendo all'acido cloridrico, prima della titolazione, BaCl<sub>2</sub>. La causa di tale divario va perciò ricercata, con ogni probabilità, nelle inevitabili impurità dell'acqua di lavaggio, dell'aria residua nella bevuta ecc.

In una serie di ricerche, infine, abbiamo determinato l'errore proprio del metodo, adottando le norme sopra esposte circa l'acquisto di CO<sub>2</sub> per le manovre di versamento del liquido da esaminare e dei liquidi di lavaggio, e circa la titolazione della barite.

In questa serie di ricerche, l'acquisto fu di 0,055 mol. CO<sub>2</sub>, ed il titolo della barite fu trovato essere 0,04055 n. In quattro esperienze furono estratti 1, 2, 5 e 10 cmc. di una soluzione 0,115 n. di Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub>, ed i risultati furono i seguenti:

Sol. 0,115 n Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> estratti cmc.	Ba(OH) <sub>2</sub> 0,04055 n nella bevuta cmc.	HCl 0,025 n per dosare l'eccesso di Ba(OH) <sub>2</sub> cmc.	CO <sub>2</sub> estratto mol	CO <sub>2</sub> estratto corretto dell'acquisto mol	CO <sub>2</sub> calcolato mol	Differenza assoluta mol	Differenza percentuale
1	10	11,25	0,0621	0,0571	0,0575	— 0,004	0,7
2	10	6,55	0,051208	0,051158	0,051150	+ 0,008	0,7
5	15	0,97	0,052920	0,052870	0,052875	— 0,005	0,2
10	30	2,15	0,055813	0,055763	0,055750	+ 0,0013	0,2

Come si vede, le differenze fra quantità trovata e quantità calcolata di CO<sub>2</sub> sono tali che, avuto riguardo alla quantità minima di CO<sub>2</sub> determinata, permettono di affermare che il metodo di cui ci siamo occupati è assolutamente preciso, e degno della massima fiducia.

**Storia della Matematica.** — *Sull'εγωδοσ di Archimede.* Nota del prof. G. VACCA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Nella introduzione al suo scritto sul *Metodo*, Archimede <sup>(1)</sup> rileva l'importanza della nuova via, non solo per i risultati da lui scoperti, ma anche per quelli che i matematici futuri avrebbero un giorno ritrovati.

Gli storici della matematica hanno ben posto in luce da questo punto di vista l'opera di Archimede, dimostrando quanto sarebbe stato più semplice il compito di Keplero, di Cavalieri, e degli altri scopritori del calcolo infinitesimale se avessero potuto aver conoscenza dell'opera del geometra Siracusano.

Io desidero in questa breve Nota richiamare l'attenzione sui teoremi nuovi che propriamente si prefigge di dimostrare Archimede in questo scritto, cioè

<sup>(1)</sup> Archimedis, *Opera omnia*, ed. I. L. Heiberg, II edit., vol. II, Lipsia, Teubner, 1913, p. 426-428.

la determinazione del volume dell'unghia cilindrica<sup>(1)</sup>, e del volume della parte comune a due cilindri circolari retti, aventi per basi due cerchi inscritti in due faccie adiacenti di un cubo.

Questi volumi, come Archimede stesso ha osservato, sono commensurabili con quelli del cubo circoscritto, ed offrono, nella geometria solida l'analogo della quadratura delle lunule di Ippocrate, della geometria piana.

Mentre però l'opera di Archimede completa, fu ignorata e rimase nascosta fino ai nostri giorni, questi due risultati, furono noti e destarono l'attenzione dei matematici dei secoli scorsi.

2. Nella sua *Metrica*, Erone<sup>(2)</sup> aveva riferito come le conoscenze del volume interno a due cilindri di egual diametro, che s'intersecano ad angolo retto sia interessante per la pratica, trovandosi raffigurato un tale solido nella costruzione delle volte, delle fontane e dei bagni, cioè nei luoghi nei quali non è conveniente adoprare coperture in legname. Egli enunciava quindi la regola data da Archimede per calcolare quel volume.

Malgrado che anche questi passi di Erone siano stati scoperti e pubblicati soltanto di recente, ciò che essi contengono fu tuttavia fatto conoscere e pubblicato nel 1509 da Luca Paciolo, e nel 1639 da Bonaventura Cavalieri.

3. Luca Paciolo in appendice al trattato dei cinque corpi regolari<sup>(3)</sup> (del quale egli non è probabilmente autore, come ha dimostrato in un lavoro in corso di stampa nelle Memorie della R. Accademia dei Lincei il cav. Gerolamo Mancini), riferisce infatti questo problema.

« Egli è una colonna tonda a sesto che il diametro suo è 4, cioè de  
« ciascuna sua basa, ed un'altra colonna de simile grossezza la fora ortogo-  
« nalmente, domandase che quantità se leva de la prima colonna per quella  
« foratura cioè che quantità se leva de la colonna per quello buso ».

Il Paciolo enuncia dapprima la regola per il calcolo del volume, che consiste nel prendere i due terzi del cubo del diametro delle basi delle due colonne (cioè  $42 \frac{2}{3}$  nel caso del diametro 4, dell'esempio da lui dato).

Egli fa poi seguire questo risultato da un tentativo di dimostrazione, insufficiente ed inesatto. Esso consiste nell'ammettere che, come il volume di una sfera è doppio di quello del doppio cono inscritto in essa, avente per base un circolo massimo e per vertici i due poli di questo circolo (come risulta dal volume della sfera dato da Archimede), così il volume del solido

(<sup>1</sup>) Il nome *ungula cylindrica* si trova nell'opera: *Quadratura circuli*, tomus II, auctore R. P. Gregorio a S. Vincentio, S. I., Antverpiae, 1647, liber nonus, pag. 955.

(<sup>2</sup>) Heronis Alexandrini, *Metrica*, ed. Hermann Schöne, Leipzig, Teubner, 1903 (Opera, vol. III, p. 130).

(<sup>3</sup>) Fa seguito alla *Divina proportione* ed è intitolato: *Libellus in tres partes tractatus divisus quinque corporum regularium et dependentium active perscrutationis*, D. Petro Soderino principi perpetuo populi Florentini a M. LUCA PACIOLO Burgense, minoritano particulariter dicatus. Tractatus tertius, casus 10, fol. 24; Venetiis, 1509, impressum per probum virum Paganinum de Paganinis.

che è parte comune dei due cilindri sia doppio della bipiramide a base quadrata inscritta in esso. E poichè questa bipiramide vale un terzo del cubo circoscritto, il solido comune ai due cilindri deve esserne i due terzi. Il Paciolo non sa dare altra ragione di questo risultato (che del resto è vero), che questa sola, che cioè nelle due sezioni fatte nei due piani diagonali (passanti cioè per le due ellissi intersezioni dei due cilindri), il rapporto tra l'area sezione del solido comune ai due cilindri (che è una ellissi) e l'area della sezione della bipiramide (che è una losanga inscritta nell'ellissi), è eguale al rapporto delle aree delle sezioni fatte con un piano passante per l'asse della sfera e del doppio cono in essa inscritto.

Il ragionamento contorto, non è che un tentativo non riuscito, di giustificare il risultato<sup>(1)</sup>, forse tratto da Erone, od almeno da qualche matematico bizantino il quale abbia riferito il passo di Erone<sup>(2)</sup>.

4. Ma il Paciolo continua proponendo un altro problema:

« Casus 11. — Egli è una volta a cruciera et per ciascuna faccia 8, et è alta 4, così nel colmo degli archi commo nel mezzo della volta; domandase de la sua superficie concava :

« Tu dei sapere che la volta in cruciera è composta de doi mezzi canoni, intersegandosi l'uno l'altro nelle loro congiuntioni fanno quattro puncte de scacheti de palle, et i posamenti sopra le quattro basa se congiungano a do a do puncte terminando in uno solo puncto... »

Anche qui il Paciolo giunge ad un risultato esatto ( $73 \frac{1}{7}$ , supposto  $\pi = \frac{22}{7}$ ), con un ragionamento insufficiente, il che porta a credere che anche di questo risultato egli non è autore. D'altra parte l'area della volta a crociera, che si trova oggi facilmente, era un problema della stessa difficoltà di quello risolto da Archimede.

A me sembra quindi probabile che ad Archimede stesso si debba questo risultato, dato sotto questa o sotto altra forma, in qualche altra delle sue opere perdute, forse quella « περί πλινθίων και κολύμβων », ovvero quella « de superficiebus et corporibus irregularibus »<sup>(3)</sup>.

5. È poi notevole che il Paciolo si proponga ancora il problema.

« Casus 15. — Egli è uno corpo sferico che l'axis suo è 10. Uno lo fora nel mezzo con uno trevello et passalo de l'altro canto, et il diametro

(1) Si noti che Keplero con un metodo analogo, giustifica la misura dell'area di un emisfero data da Archimede, osservando che è verisimile che essa sia (come è difatti), media geometrica tra quella del cono circolare retto inscritto ad esso e quella del cono circoscritto. Cfr. *Nova stereometria doliorum*, 1615, prima pars, theor. VI (Kepleri, *Opera omnia*, vol. IV, pag. 561).

(2) È interessante il confronto dell'opera di Erone, coi trattati di Luca Paciolo. L'identità di vari esempi numerici, del metodo seguito nelle dimostrazioni, dimostrano chiaramente l'origine greca dei trattati.

(3) Cfr. Archimedis, *Opera omnia*, ed., I. L. Heiberg, vol. II, pp. 542-543, Leipzig, 1913.

« del tondo del buso 2, domandase che leva de quella quadratura del corpo « sperico per quella foratura ».

Senza seguire il Paciolo nel suo stile contorto, basterà dire semplicemente che il suo problema conduce ad osservare che *la porzione di sfera esterna ad un cilindro inscritto in essa, ha lo stesso volume di una sfera avente per diametro l'altezza del cilindro.*

Forse anche questo risultato fu conosciuto da Archimede, o da alcuno dei suoi discepoli?

Concluderò queste notizie su Luca Paciolo osservando, che egli infine, precorrendo Keplero <sup>(1)</sup>, si propone il problema di trovare il volume di una botte, e dà perciò varie regole.

6. Bonaventura Cavalieri nel 1639 <sup>(2)</sup> senza citare nè il Paciolo, nè altri autori, si propone nel suo problema 80 (p. 435) di « misurare la capacità delle botti », e nel suo probl. 81 (p. 450) « come si possi misurare il vano o capacità delle volte fatte a croce ».

Egli dà soltanto regole empiriche, poichè (p. 458): « la ragione della « detta misura dipende dalli principî della mia geometria conforme ai quali « l'ho dimostrata, quale però tralascio come che sia assai lunga.... »

7. È da notarsi che Bonaventura Cavalieri sebbene in questi suoi problemi non citi alcuno, conobbe e studiò l'opera di Keplero <sup>(3)</sup>.

Rimane soltanto il dubbio se Keplero a sua volta abbia conosciuto l'opera di Luca Paciolo <sup>(4)</sup>.

Aggiungerò infine che queste mie note bibliografiche completano quelle aggiunte da T. Reinach <sup>(5)</sup> alla sua versione del trattato di Archimede.

<sup>(1)</sup> *Nova Stereometria Doliorum vinariorum*, Lincii, 1615 (Keplero, *Opera omnia*, ed. Frisch Frankofurti, 1868, vol. IV, p. 551).

<sup>(2)</sup> B. Cavalieri, *Centuria di varii problemi*, Bologna, Monti, 1639.

<sup>(3)</sup> Che egli cita infatti nella prefazione alla sua *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Bononiae, 1635 (fol. b, recto).

<sup>(4)</sup> Negli indici del Frisch dell' *Opera omnia* di Keplero, vol. VIII, 2, il nome del Paciolo non appare mai citato.

<sup>(5)</sup> *Revue générale des sciences*, Paris, 1907, 15 decembre. Il Reinach attribuiva a Leopold Hugo, al principio del sec. XIX, la scoperta dei volumi delle volte, etc.