ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Analisi col metodo Pregl:

	Trovato	Calcolato per $C_5H_{11}O_2N$
C	51.26	51.28
H	9.47	9.40
N	11.81	11.97

Lo studio ulteriore del contegno dell'acido prussico, anche all'infuori dell'influenza della luce, presenta, come si vede, qualche interesse, che potrebbe riguardare anche la fisiologia vegetale; però abbiamo in preparazione alcune esperienze in proposito.

Per ultimo sentiamo il grato dovere di ringraziare il prof. F. Pregl per la grande gentilezza con la quale accolse nel suo laboratorio a Graz il dott. Emilio Sernagiotto, dove eseguì alcune micro-analisi riportate nel presente lavoro; esprimiamo inoltre la nostra riconoscenza anche al dott. Sernagiotto che ci ha coadiuvati in queste ricerche.

Meccanica. — *Sopra le forme quasi-circolari dell'anello di Saturno* (1). Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio Levi-Civita.

. . . . . , a proposito della Sua idea di studiare il comportamento longitudinale dell'anello di Saturno, senza ammettere preventivamente la forma circolare, come, sia pure ragionevolmente, veniva fatto pel passato, mi permetto di soggiungere quanto segue:

La esistenza di direttrici anche non circolari viene messa luminosamente in evidenza, oltre che dalle considerazioni da Lei suggerite, anche dalla sommaria ispezione delle equazioni, dalle quali Ella riescì a far dipendere la forma della direttrice e che presentano così felice analogia con quelle che regolano l'equilibrio di un filo flessibile ed inestendibile (2).

Come Ella giustamente osserva, dopo le circolari, assumono speciale interesse, dal punto di vista astronomico, le configurazioni vicine alle circolari e che io chiamerei — mi accordi la preferenza — *configurazioni quasi-circolari*. Ella fornisce una classe di soluzioni corrispondenti a particolari configurazioni quasi-circolari piane (3). A tale proposito mi permetto di richiamare la Sua attenzione sopra una categoria delle stesse, che mi sembra la più generale possibile; essa comprende, in particolare, quella da lei già

(1) Estratto da una lettera al prof. Levi-Civita.

(2) Mi riferisco al lavoro: *Sulla forma dell'anello di Saturno*, Atti del R. Istituto Veneto di scienze lettere ed arti, tomo LXVIII, pp. 557-583.

(3) Veggasi altresì: A. Viterbi, *Su una classe speciale di forme dell'anello di Saturno*, Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, tomo LXIX, pp. 1129-1149; *Sulle direttrici piane dell'anello di Saturno*, ibidem, tomo LXX, pp. 1311-1333.

messa in evidenza, nonchè un'altra cui corrispondono configurazioni ellittiche, che io credo abbiano, dopo le circolari, il maggior interesse dal punto di vista astronomico.

Mi riferisco senz'altro al Suo lavoro.

1. Assunto nel piano della direttrice un sistema di coordinate polari ϱ e ϑ con polo nel centro di Saturno, e detto s l'arco della direttrice contato a partire da un'origine arbitraria, positivamente nel senso delle ϑ crescenti, la questione è ridotta, in sostanza, alla integrazione del sistema costituito dalle sue equazioni (14) e (15)

$$(1)\qquad \begin{cases} 2\psi + \dfrac{1}{\varrho} + \dfrac{1}{2}\varrho^2 = h\,, \\[2ex] \psi^2\varrho^2 \dfrac{d\vartheta}{ds} = \lambda\,, \end{cases}$$

(h e $\lambda > 0$ costanti arbitrarie): cioè alla determinazione di due funzioni ϱ e ψ dell'argomento ϑ, di cui la seconda serve a caratterizzare la densità lineare dell'anello.

In tali equazioni, com'Ella avrà già intravvisto, ho assunto $a = 1$, cioè ho assunto come unità di lunghezza il raggio dell'orbita circolare di un satellite (di massa trascurabile di fronte a quella di Saturno), che avesse per moto medio la velocità angolare ω di ciascun anello.

Orbene, mi propongo di far vedere che, posto

$$(2)\qquad \varrho = \varrho_0 \{1 + \varepsilon\varrho_1(\vartheta)\}\,,$$

dove ϱ_0 è una costante arbitraria > 1, ε una costante arbitraria infinitesima, e $\varrho_1(\vartheta)$ una funzione arbitraria di ϑ, è sempre possibile di determinare una $\psi(\vartheta)$, e le due costanti h e λ in guisa che le (1) riescano identicamente soddisfatte.

Potendosi scrivere la (2) anche nel modo seguente:

$$\varepsilon\varrho_1 = \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0}\,,$$

ne risulta che $\varepsilon\varrho_1$ (quantità di 1° ordine) altro non è se non *lo scostamento unitario* dei punti della curva (2) dalla circonferenza $\varrho = \varrho_0$.

Naturalmente, interessando avere delle direttrici chiuse, basterà imporre alla $\varrho_1(\vartheta)$ di essere periodica di periodo $2k\pi$, con k numero razionale.

Ciò posto, vengo alla parte deduttiva.

2. Poichè, trattando ε come quantità di primo ordine, si ha, per (2),

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 + \varrho^2}} = \frac{1}{\varrho_0}(1 - \varepsilon\varrho_1)\,,$$

le (1), per la (2) stessa, divengono, colla cennata approssimazione,

$$(3)\qquad \begin{cases} 2\psi = h - \dfrac{1}{\varrho_0} - \dfrac{1}{2}\varrho_0^2 + \left(\dfrac{1}{\varrho_0} - \varrho_0^2\right)\varepsilon\varrho_1 , \\ \psi^2\varrho_0(1+\varepsilon\varrho)_1 = \lambda . \end{cases}$$

Com'è facilissimo di accertare, queste equazioni risultano identicamente soddisfatte, entro i limiti della voluta approssimazione, prendendo,

$$(4)\qquad \begin{cases} h = \dfrac{5}{2}\varrho_0^2 - \dfrac{1}{\varrho_0} , \\ \lambda = \dfrac{1}{\varrho_0}(\varrho_0^3 - 1)^2 , \end{cases}$$

nonchè

$$(5)\qquad \psi = \frac{\varrho_0^3 - 1}{\varrho_0}\left\{1 - \frac{1}{2}\varepsilon\varrho_1\right\} .$$

È pertanto lecito di concludere che le funzioni (2) e (5) rendono soddisfatte, nelle imposte circostanze, le equazioni (1), *qualunque sia la funzione* $\varrho_1(\vartheta)$: basta a tal uopo che le costanti h e λ sieno legate a ϱ_0 dalle relazioni (4).

Si può dunque asserire, senz'altro, costituire le (2) e (5) l'integrale generale delle soluzioni quasi-circolari piane.

3. In particolare, preso

$$\varepsilon\varrho_1 = -\varrho_0\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos\alpha(\vartheta - \vartheta_0)\} ,$$

con ϑ_0 costante arbitraria, ε_1 e ε_2 costanti arbitrarie infinitesime, e

$$\alpha = \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{\varrho_0^3 - 1}} ,$$

si ha la soluzione (30′) della Sua Nota.

4. La (2) può rappresentare anche ellissi, delle cui eccentricità sieno trascurabili le quarte potenze.

Infatti, l'equazione di un'ellisse, il cui asse minore è ϱ_0, e la cui eccentricità è e, può notoriamente scriversi,

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\vartheta}} ,$$

ovvero, trascurando e^4 e potenze superiori,

$$(6)\qquad \varrho = \varrho_0\left(1 + \frac{1}{2}e^2\cos^2\vartheta\right) .$$

Questa rientra manifestamente nella (2); basta prendere

$$\varepsilon = \frac{1}{2} e^2 \quad , \quad \varrho_1 = \cos^2 \vartheta \, . \tag{7}$$

5. Se, com' Ella accenna, si assume come massa unitaria $\frac{M}{k}$ (M massa di Saturno, k il parametro costante di configurazione dell'anello), la funzione ψ, definita dalla (5),

$$\psi = \frac{\varrho_0^3 - 1}{\varrho_0} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \varrho_1 \right\},$$

non è altro che la densità lineare.

Poichè, naturalmente, dev'essere $\psi > 0$, si esige che sia $\varrho_0 > 1$. Nel caso di configurazioni ellittiche (6), si ha, per le (7),

$$\psi = \frac{\varrho_0^3 - 1}{\varrho_0} \left\{ 1 - \frac{1}{4} e^2 \cos^2 \vartheta \right\},$$

mentre dalla (6) stessa scende che

$$\varrho > \varrho_0 > 1 \, .$$

Partendo da questa, con considerazioni identiche alle Sue, si perviene, anche per le configurazioni ellittiche, alla conclusione da Lei già stabilita: *la velocità angolare di ciascun anello deve essere più grande di quella che competerebbe ad un satellite posto alla stessa distanza media da Saturno.*

Matematica. — *Sur les fonctions permutables analytiques.* Nota II di Joseph Pérès, presentata dal Socio V. Volterra.

1. J'ai demontré, dans ma précédente Note [1], le résultat suivant:

Soit $f(x, y)$ une fonction analytique autour de l'origine $x = y = 0$ et telle que $f(x, x)$ ne soit pas identiquement nul; on obtient toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec elle et analytiques autour de l'origine en formant tous les développements formels

$$\sum_0^\infty {}_n \, a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y), \tag{1}$$

les constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ étant arbitraires sous la seule condition que le développement

$$\sum_0^\infty {}_p \sum_0^\infty {}_q \, c_{p,q} \, x^p y^q, \tag{2}$$

[1] Rend. R. Accad. Lincei, 2ième sem. 1913, page 649.