ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Questa rientra manifestamente nella (2); basta prendere

$$\varepsilon = \frac{1}{2} e^2 \quad , \quad \varrho_1 = \cos^2 \vartheta \, . \tag{7}$$

5. Se, com' Ella accenna, si assume come massa unitaria $\frac{M}{k}$ (M massa di Saturno, k il parametro costante di configurazione dell'anello), la funzione ψ, definita dalla (5),

$$\psi = \frac{\varrho_0^3 - 1}{\varrho_0} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \varrho_1 \right\},$$

non è altro che la densità lineare.

Poichè, naturalmente, dev'essere $\psi > 0$, si esige che sia $\varrho_0 > 1$. Nel caso di configurazioni ellittiche (6), si ha, per le (7),

$$\psi = \frac{\varrho_0^3 - 1}{\varrho_0} \left\{ 1 - \frac{1}{4} e^2 \cos^2 \vartheta \right\},$$

mentre dalla (6) stessa scende che

$$\varrho > \varrho_0 > 1 \, .$$

Partendo da questa, con considerazioni identiche alle Sue, si perviene, anche per le configurazioni ellittiche, alla conclusione da Lei già stabilita: *la velocità angolare di ciascun anello deve essere più grande di quella che competerebbe ad un satellite posto alla stessa distanza media da Saturno.*

Matematica. — *Sur les fonctions permutables analytiques.* Nota II di Joseph Pérès, presentata dal Socio V. Volterra.

1. J'ai demontré, dans ma précédente Note (¹), le résultat suivant:

Soit $f(x, y)$ une fonction analytique autour de l'origine $x = y = 0$ et telle que $f(x, x)$ ne soit pas identiquement nul; on obtient toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec elle et analytiques autour de l'origine en formant tous les développements formels

$$\sum_0^\infty {}_n \, a_n \overset{\star}{f}{}^{n+1}(x, y), \tag{1}$$

les constantes $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ étant arbitraires sous la seule condition que le développement

$$\sum_0^\infty {}_p \sum_0^\infty {}_q \, c_{p,q} \, x^p y^q, \tag{2}$$

(¹) Rend. R. Accad. Lincei, 2ième sem. 1913, page 649.

obtenue en ordonnant les termes de la série (1) *suivant les puissances de x et de y, représente une fonction analytique autour de l'origine. Cette fonction sera $\varphi(x, y)$.*

Il est possible de mettre sous une forme bien plus simple la condition ainsi imposée aux $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Je me restreindrai pour cela au cas où $f(x, y)$ est du premier ordre autour de l'origine, et je supposerai même (ce n'est pas une restriction) comme on le fait souvent, que $f(x, x) = 1$.

Les differentes puissances symboliques de f sont alors susceptibles de développements de la forme

$$\frac{n!\, \overset{\star}{f}{}^{n+1}(x, y)}{(y-x)^n} = 1 + \sum_1^\infty{}_p\, (y-x)^p\, g_p^{(n)}(x)\,,$$

les $g_p^{(n)}(x)$ étant des fonctions analytiques de x dans un certain cercle autour de $x = 0$. Nous aurons besoin d'une limitation des $|g_p^{(n)}(x)|$: par des calculs trop longs pour les reproduire ici, on peut prouver l'existence de deux nombres α et r tels que,

$$\text{pour}\quad |x| \leq \alpha\,,\quad \text{on ait}\ |g_p^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{r^p}\,.$$

Considérons alors l'identité, dont on a précisé le sens plus haut:

$$\sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q\, c_{p,q}\, x^p\, y^q = \sum_0^\infty{}_n\, a_n\, \overset{\star}{f}{}^{n+1}(x, y);$$

en y faisant $x = 0$, elle ne doit pas cesser d'être satisfaite. Il vient donc

$$\sum_0^\infty{}_q\, c_{0,q}\, y^q = \sum_0^\infty{}_n\, a_n \frac{y^n}{n!}\left(1 + \sum_1^\infty{}_i\, y^i \gamma_i^{(n)}\right)$$

avec

$$\gamma_i^{(n)} = g_i^{(n)}(o)\,;$$

d'où

$$\text{(3)}\qquad \frac{a_q}{q!} = c_{0,q} - \sum_1^q{}_i \frac{a_{q-i}}{(q-i)!}\gamma_i^{(q-i)}$$

$$(q = 0, 1, \ldots \infty)\,.$$

Mais on a

$$|\gamma_i^{(q-i)}| < \frac{1}{r^i}\,;$$

on peut toujours supposer, en réduisant au besoin la valeur de r, que

$$|c_{0,q}| < \frac{N}{r^q}\,;$$

on déduit alors, des formules (3), que

$$|a_q| < \mathrm{N}\, q\,!\left(\frac{2}{r}\right)^q .$$

Mais puisque

$$\left|\overset{\star}{f}{}^{n+1}(x\,,y)\right| < \mathrm{M}^{n+1}\frac{|y-x|^n}{n\,!},$$

c'est dire que la série (1) converge absolument et uniformément et représente $\varphi(x\,,y)$ pour x et y suffisamment voisins de zéro. Ce résultat n'est en rien modifié si je laisse tomber l'hypothèse $f(x\,,x)=1$. Je puis donc dire :

I. *$f(x\,,y)$ étant analytique autour de l'origine, toute série*

$$\sum_0^\infty {}_n\, a_n \overset{\star}{f}{}^{n+1}(x\,,y)\,,$$

où les a_n sont des constantes telles que la série

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{a_n}{n\,!} z^n$$

représente une fonction analytique de z, converge absolument et uniformément pour x et y assez voisin de zéro et représente une fonction analytique permutable avec $f(x\,,y)$.

II. *Réciproquement, on obtient toutes les fonctions $\varphi(x\,,y)$ analytiques autour de l'origine et permutables avec une fonction $f(x\,,y)$ du premier ordre par des développements du type précédent.*

2. Cette réciproque répond, et très simplement, à la question : trouver toutes les fonctions analytiques permutables avec $f(x\,,y)$.

Les conséquences en sont nombreuses : je citerai en particulier les résultats énoncés au § 4 de ma précédente Note. En voici une autre : comme la convergence d'une série du type précédent

$$a_0 f(x\,,y) + a_1 \overset{\star}{f}{}^2(x\,,y) + \cdots + a_n \overset{\star}{f}{}^{n+1}(x\,,y) + \cdots$$

dépend du module de la différence $y-x$, *une fonction $\varphi(x\,,y)$, permutable avec $f(x\,,y)$ et analytique autour de l'origine* [1], *sera aussi analytique au voisinage de tout point de la multiplicité $x=y$ qui n'est pas un point singulier de $f(x\,,y)$.* Les zéros de $f(x\,,x)$ ne seront pas, comme on pouvait avoir d'autre part motif de le penser, des points singuliers de φ.

3. Il est intéressant de savoir si l'on peut donner, pour les fonctions de variables réelles continues et permutables avec $f(x\,,y)$, des développe-

[1] Et l'origine ne joue pas un rôle particulier.

ments non pas de type (1), mais ayant, avec les développements de type (1), le même rapport que les séries entières avec les séries de polynomes. Je me contente ici d'énoncer les résultats que j'ai obtenus.

En s'appuyant d'une part sur les résultats précédents, d'autre part sur les formules données par M. Volterra pour trouver toutes les fonctions permutables avec $f(x, y)$, on prouve que:

I. *$f(x, y)$ étant une fonction analytique et du premier ordre au voisinage de l'origine, toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ continues par rapport aux variables réelles x et y, définies dans le voisinage de l'origine et y étant permutables avec $f(x, y)$, peuvent être développés en série uniformément et absolument convergente de polynômes des puissances symboliques de f. On a*

$$\varphi(x, y) = \sum_0^\infty {}_n \left(a_0^{(n)} f(x, y) + a_1^{(n)} \overset{\star}{f}{}^2(x, y) + \cdots + a_p^{(n)} \overset{\star}{f}{}^{\bar{p}+1}(x, y) \right).$$

II. *On peut définir pour ces fonctions $\varphi(x, y)$, des polynômes de meilleure approximation jouant dans cette théorie le rôle des polynômes de Tchébicheff dans la théorie des fonctions d'une variable et jouissant de propriétés analogues.*

4. Indiquons, en terminant, un point de vue sous lequel il est intéressant d'envisager les fonctions permutables: on peut considérer l'étude des fonctions permutables avec une fonction donnée comme généralisant l'étude des fonctions d'une variable, car on obtient l'ensemble des fonctions d'une variable $(y - x)$ en envisageant toutes les fonctions permutables avec l'unité. Il y a donc lieu de chercher à étendre aux fonctions permutables avec une fonction donnée, les propriétés des fonctions d'une variable. C'est ce que nous avons fait pour certaines de ces propriétés.

Meccanica. — *Sopra le formole di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica.* Nota di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Meccanica. — *Sulla trasformazione di alcuni integrali che si presentano nell'idrodinamica.* Nota del prof. T. BOGGIO, presentata dal Corrisp. E. ALMANSI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.