ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Gli strati più alti, a piante, non contengono fossili marini: nè si conoscono nel Westfaliano delle Alpi occidentali, o nel Carbonifero superiore di Sardegna. Ve ne sono negli strati di Jano; per un supposto *Productus horridus*, che poi si trovò inesattamente determinato, questi furono creduti da alcuno Permiani: ma in realtà appartengono al Carbonifero superiore Stefaniano. Però di quei molluschi non fu mai pubblicata l'illustrazione. Pure difficile è il paragone col Carbonifero e col Permiano delle Alpi Carniche, coi quali non è ben nota, per ora, comunanza di specie.

Meccanica. — *Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili.* Nota del dott. ing. G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Nel 1884, Gyldén pubblicava [1] una Nota *Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili*, riducendolo ad equazioni che egli chiama funzionali e che in realtà non sono altro che equazioni integro-differenziali. Le coordinate incognite ξ ed η vengono infatti date dal sistema

$$
(1) \qquad \begin{cases} \xi \dfrac{d\psi}{d\tau} - \psi \dfrac{d\xi}{d\tau} = h_1 + \displaystyle\int \xi \frac{\mathrm{F}}{\varrho^3}\, d\tau \\[2ex] \eta \dfrac{d\psi}{d\tau} - \psi \dfrac{d\eta}{d\tau} = h_2 + \displaystyle\int \eta \frac{\mathrm{F}}{\varrho^3}\, d\tau\,. \end{cases}
$$

Questa via abbandonata dai matematici come un' inutile complicazione viene ora ripresa dal Tommasetti e dallo Zarlatti [2]. Non sembra però che il metodo delle equazioni integro-differenziali dia nuovi risultati; ed infatti le quattro proprietà della traiettoria che i due autori dimostrano ed indicano con le lettere $\alpha)$ $\beta)$ $\gamma)$ $\delta)$, e l'equazione in coordinate polari a cui arrivano erano già state precedentemente pubblicate da me [3] in due Note apparse su questi Rendiconti. Poichè gli autori non fanno mai il mio nome, io domando all'Accademia il permesso di stabilire la mia priorità, tanto più che è necessario di rettificare alcuni errori in cui essi sono caduti.

2. Il Tommasetti e lo Zarlatti dànno grande importanza al caso di masse sempre decrescenti, per lo studio delle orbite cometarie. Essi scrivono infatti (Bulletin, pp. 156-157).

« Ainsi p. ex. considérons une comète periodique; si nous supposons, « comme l'observation l'a confirmé en quelque cas, que dans le voisinage « du périhélie, à cause des actions solaires, quelque soit leur nature, se

(1) *Die bahnbewegungen in einem Systeme* ecc.. Astron. Nach., 2593.

(2) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (séance du 13 octobre 1913); e: Bulletin de l'Observatoire de Paris (avril 1914).

(3) Questi Rendiconti, sedute del 17 dicembre 1911 e del 2 marzo 1913.

« produit une dissipation de matière, le noyau de la comète après le passage « au périhélie décrira une trajectoire dont tous les éléments sont grandis (?) « Nos resultats confirment l'idée de quelques astronomes que toutes les « comètes quasi paraboliques ou hyperboliques ont été elliptiques ».

Cominciamo ad osservare che il piano dell'orbita resta matematicamente invariabile, qualunque sia la diminuzione o l'aumento di massa; è erroneo quindi scrivere che *tutti* gli elementi sono « grandis », giacchè l'inclinazione e la longitudine del nodo rimangono invariabili. Occorre anche ricordare che l'orbita relativa di una cometa, non dipende nè dalla propria massa μ, nè da quella del sole M, ma soltanto dalla somma $M + \mu$. Ora μ è sempre così piccolo rispetto ad M, che noi possiamo asserire *che la traiettoria di una cometa è fisicamente indipendente dalla propria massa.* Ciò è tanto vero che noi calcoliamo *con la più grande esattezza* l'orbita e le perturbazioni di una cometa, *senza conoscerne la massa.* Anche se la massa di una cometa si riducesse, supponiamo pure, alla sua centesima parte, l'orbita resterebbe identica dentro al limite degli errori dell'osservazione. Ma vi è di più.

L'aumento secolare della massa solare M, per quanto piccolo, è certamente superiore all'ipotetica diminuzione di cui è suscettibile la massa di una cometa. Qualunque sia quindi la cometa che noi studiamo, la quantità $M + \mu$ è una funzione crescente del tempo. Perciò da questo lato, se non sussistono altre cause di perturbazione, non solo non è vero che l'orbita da ellisse si cangi in parabola, come scrivono il Tommasetti e lo Zarlatti, ma in qualche caso può avvenire esattamente il contrario.

3. Osservo ancora che, dal lato analitico, il problema dei due corpi con masse sempre decrescenti, si riconduce facilmente al caso di masse sempre crescenti. Sia infatti $F(t)$ una funzione *decrescente* dell'argomento t; la soluzione e lo studio del problema dipendono dall'equazione:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - K\,\frac{F(t)}{r^2}. \tag{2}$$

Facciamo nella (2) $t = -\tau$ e poniamo $F(t) = \psi(\tau)$: avremo essendo $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{d^2r}{[d(-t)]^2}$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{c^2}{r^3} - K\,\frac{\psi(\tau)}{r^2}. \tag{3}$$

Ora nella (3) $\psi(\tau)$ è una funzione *crescente* di τ, se quindi immaginiamo studiato il movimento definito dalla (3), potremo anche considerare come studiato il movimento definito dalla (2).

4. Il Tommasetti e lo Zarlatti dànno nella loro Nota tre leggi del movimento che indicano con le lettere α) β) γ) e, nel Bollettino ne aggiun-

gono una quarta che indicano con la lettera δ). Scrivo in colonna le une accanto le altre le leggi del Tommasetti e dello Zarlatti e le mie. Bene inteso, tolgo le parole tra parentesi che si riferiscono alle masse decrescenti, e che, per quanto ho detto, non ci dànno nulla di nuovo.

ARMELLINI.	TOMMASETTI e ZARLATTI.
Legge VII. « Se in un istante qualsiasi t_1 la conica osculatrice alla traiettoria è un'ellisse o una parabola, in tutti gl'istanti successivi la conica osculatrice sarà certamente ellittica ». (Nota II, pag. 298).	α) « Pour $F(t)$ croissant, si à un instant t_1 la conique osculatrice est une ellipse ou parabole, en tous les instants successifs elle sera toujours elliptique ». (Bulletin, page 156, et C. R.).
Teor. II. « [Se $M(t)$ diviene ∞ per $t=\infty$] e se r ammette un limite superiore L, allora crescendo il tempo, r diviene minore di ogni quantità assegnata ». (Nota I, pag. 683).	β) « Si $F(t)$ pour $t=\infty$ tend vers ∞, et si r admet une limite supérieure R, on a $\lim_{t=\infty} r = 0$ ». (Bulletin, page 157, et C. R.).
Legge VI. « Se in un istante qualsiasi la differenza tra la semiforza viva e la funzione delle forze per il punto B è nulla o negativa, allora [se $M(t)$ diviene ∞ per $t=\infty$] crescendo il tempo r diviene minore di ogni quantità assegnata ». (Nota II, pag. 296).	γ) Si à un instant donné la conique osculatrice est une parabole ou ellipse et $\lim_{t=\infty} F(t) = \infty$ il en resulte $\lim_{t=\infty} r = 0$. (Bulletin, page 159, et C. R.).
« Affinchè l'urto dei due corpi (in senso fisico, cioè affinchè r divenga $< \varepsilon$) avvenga certamente, *qualunque siano le condizioni iniziali del moto*, non basta che $M(t)$ divenga ∞ per $t=\infty$; ma occorre che essa lo divenga di ordine non inferiore al primo. Per es. se la massa solare crescesse secondo la legge $a+b\sqrt{t}$, *alcune comete iperboliche potrebbero sfuggire alla sua attrazione* ». (Nota II, pag. 299).	δ) « Pour toute loi $F(t)$ telle que $\lim_{t=\infty} F(t) = \lim_{t=\infty} (A)\, t^n$ où $0<n<1$, *quelque comète hyperbolique pourrait échapper à l'attraction du soleil* ». (Bulletin, page 159). « Si $\lim_{t=\infty} F(t) = \lim_{t=\infty} \lvert A \rvert\, t^n$ ou $n>1$, on a le choc ». (Id., page 158).

5. Come il lettore vede i risultati sono identici. Dobbiamo però osservare che è erroneo asserire come fanno il Tommasetti e lo Zarlatti, nelle proprietà β) e γ) che $\lim_{t=\infty} r = 0$; noi sappiamo solo, come io pubblico, che r diviene inferiore ad ogni quantità assegnata: cioè che è sempre possibile trovare un istante t_1 tale che in esso sia $r < \varepsilon$; o, in altre parole, che esso ha per limite *inferiore* lo zero.

Ed è facile anzi di costruire degli esempi in cui, benchè r rimanga sempre minore di L, *e benchè* $M(t)$ *cresca all'infinito, pure r non tende ad alcun limite.* Il più semplice è di supporre che la massa solare aumenti bruscamente tutte le volte che la terra è al suo afelio.

L'orbita terrestre risulta allora composta di una successione di ellissi, la cui distanza perieliaca va sempre decrescendo, mentre la distanza afeliaca resta costante. Se la massa solare crescesse in tal modo all' infinito, il raggio vettore r diverrebbe, ad ogni rivoluzione, inferiore ad ogni quantità assegnata, perchè la distanza perieliaca andrebbe a zero; ma nello stesso tempo la r non tenderebbe ad alcun limite, perchè ad ogni rivoluzione la terra riprenderebbe l'antica distanza afeliaca.

L'errore nei risultati proviene dalla mancanza di rigore nelle dimostrazioni, dove il Tommasetti e lo Zarlatti applicano spesso con poca cautela l'operazione del passaggio al limite; *spesso senza domandarsi nemmeno se questo limite esiste.*

Per es., volendo dimostrare il teorema β) gli autori dicono: « Pour démontrer la première partie de ce théorème remarquons qu'à l'instant $t = \infty$ le corps m decrira l'orbite osculatrice limite ». Sarà bene osservare che in molti casi l'orbita osculatrice limite per $t = \infty$ *non esiste.* Essa esiste soltanto quando gli elementi osculatori per $t = \infty$ tendono verso limiti ben determinati, e ciò non sempre avviene. La dimostrazione non è quindi soddisfacente.

Veniamo al teorema γ). Gli autori scrivono che se $e(t_1) < 1$ si ha $e(t) < 1$ *e ciò è perfettamente vero.* Essi ne deducono $\lim_{t=\infty} e(t) < 1$; *e ciò non è esatto.* Possiamo vederlo subito tornando a studiare l'orbita terrestre nel caso in cui la massa solare aumenti bruscamente tutte le volte che la terra è al suo afelio. Il valore attuale dell'eccentricità $e(t_1)$ è minore di 1; $e(t)$ resta ancora sempre minore dell'unità; eppure il limite per $t = \infty$ di $e(t)$ è *precisamente eguale ad 1.* Infatti la distanza perieliaca tende a zero; mentre quell'afeliaca resta costante. La quantità $\dfrac{c^2/F(t)}{1 - e(t)}$ potrebbe quindi avere un limite diverso da zero, annullandosi nello stesso tempo il numeratore e il denominatore; tutta la dimostrazione è perciò priva di valore.

6. Per giungere all'equazione della traiettoria io comincio dall'esprimere la somma delle masse $M(t)$ in funzione (approssimata) dell'anomalia vera ϑ. Giungo in tal modo all'equazione (Nota II, pag. 301)

$$(4)\quad r=\frac{c^2/K}{m+\left[G_1+\int_0^\xi \lambda(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta\right]\cos\vartheta-\left[G_2+\int_0^\xi \lambda(\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta\right]\operatorname{sen}\vartheta}.$$

Il Tommasetti e lo Zarlatti (Comptes Rendus; Bulletin, page 165) partono dall' integrale delle aree

$$(5)\qquad r^2\frac{d\vartheta}{dt}=c\,,$$

da cui ricavano (supponendo $t=0$ per $\vartheta=0$)

$$(6)\qquad t=\frac{1}{c}\int_0^\xi r^2\, d\vartheta;$$

eseguiscono la quadratura (6) col teorema della media, e ottengono:

$$(7)\qquad t=\alpha\vartheta\,.$$

Il Tommasetti e lo Zarlatti cadono anche qui in errore scrivendo, tanto nel Bollettino che nei Comptes Rendus, che α è una *costante incognita. Se α fosse costante, dalla* (7) *l'anomalia vera ϑ sarebbe proporzionale al tempo t, e l'orbita risulterebbe circolare.*

L'errore proviene dal fatto che i due autori non hanno posto attenzione al limite superiore dell' integrale (6) che è variabile. In ogni modo giunti a questa, sia pure erronea, conclusione, il Tommasetti e lo Zarlatti non dovevano far altro che sostituire di nuovo il valore di ϑ dato dalla (7) nella (5). Avrebbero immediatamente trovato come equazione della traiettoria un cerchio di raggio $r=\sqrt{c\alpha}$.

Invece essi hanno amato di seguire la strada già da me battuta esprimendo, anche loro, le masse in funzione dell'anomalia vera ϑ. Pongono dunque $\mu(t)=\mu(\alpha\vartheta)$ e ottengono, *trattando α come una costante,*

$$\frac{d^2\frac{1}{2}}{d\xi^2}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{r}=\frac{F(\xi)}{\alpha^2c^2}\qquad(\alpha\vartheta=\xi)$$

equazione che naturalmente è erronea; da essa infine ricavano:

$$(8)\quad r=\frac{1}{\left\{A_1-\frac{1}{\alpha c^2}\int_0^\xi \mu(\alpha\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta\right\}\cos\vartheta+\left\{B_2+\frac{1}{\alpha c^2}\int_0^\xi \mu(\alpha\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta\right\}\operatorname{sen}\vartheta}.$$

Formalmente anche la (8) è errata, giacchè α essendo funzione di ϑ, non può essere portata al di fuori del segno d' integrazione. *Ma soprattutto occorre osservare che, poichè α è una funzione incognita, il problema deve considerarsi come non risoluto.*

Possiamo però determinare α con una certa approssimazione ponendo, p. es., $\mu(t) = m + \lambda(\vartheta)$; dove $m = \mu(0)$ e $\lambda(\vartheta)$ è una funzione che nei casi pratici assume valori assai piccoli di fronte ad m, e può essere approssimativamente determinata nel modo che io spiego nella mia seconda Nota. Ma allora si torna alla (4) ed in tale ordine d'idee è a me che spetta la priorità.

Il Tommasetti e lo Zarlatti hanno tratto dalla (8) parecchie conclusioni nella forma della traiettoria, sempre supponendo α costante. *Inutile dire che tutte queste conclusioni vengono rese prive di valore, dal fatto che α è invece una funzione incognita di ϑ.*

7. Domando ora il permesso di riprodurre una parte di una comunicazione a me diretta dallo Zarlatti, anche a nome del Tommasetti, in cui essi credono di trovare alcuni errori nella mia opera. Poichè in realtà questi errori non sussistono, credo utile di occuparmi della questione con lo scopo precipuo di evitare, un'eventuale inutile polemica.

Dice dunque lo Zarlatti:

« . . . . . ed è per questa semplice ragione che non abbiamo creduto opportuno di citarle (le mie Note), perchè avremmo dovuto mettere in rilievo degli errori (???) ecc. ecc.

« Secondo le sue Note dei Lincei, p. es. *tutte* (???) le comete iperboliche nell'ipotesi di masse crescenti, per leggi $F(t)$ tali che $\lim\limits_{t=\infty} F(t) = \lim\limits_{t=\infty} At^n$ ove $n < 1$, *avrebbero dovuto* al limite allontanarsi indefinitamente dal sole (??), il che è falso.

« Inoltre, si rammenti che, nel *caso generale*, le variazioni dell'eccentricità sono dello stesso ordine di quelle del parametro (C. R., e Bulletin) [1] quindi (??), la formola che lei scrive

$$r = \frac{p/1 + \varepsilon t}{1 + e_0 \cos \vartheta} \tag{9}$$

è falsa (???) ».

Evidentemente il Tommasetti e lo Zarlatti hanno letto con troppa fretta i miei lavori, *altrimenti si guarderebbero dal trovare erronee delle proposizioni, che io non ho mai nè pubblicato, nè scritto, nè pensato.*

Io ho detto: « Affinchè l'urto dei due corpi avvenga certamente, qualunque siano le condizioni iniziali del moto, non basta che $M(t)$ divenga ∞ per $t = \infty$, ma occorre che lo divenga di ordine non inferiore al primo. « Per es. se la massa del sole crescesse secondo la legge $a + b\sqrt{t}$, *alcune*

[1] Mi sia permesso di osservare che assai prima del Tommasetti e dello Zarlatti, questa verità era stata dimostrata dallo Strömgren (Astr. Nachr., 3897); il quale non solo ha fatto vedere che tutte queste perturbazioni sono dello stesso ordine di grandezza, ma ha dato anche formole comodissime per calcolarle.

« comete iperboliche *potrebbero* sfuggire alla sua attrazione ed allontanar-
« sene indefinitamente » (Nota II, pag. 299). *E questo è verissimo.*

Ho scritto dunque « *alcune comete iperboliche potrebbero* » e non già « *tutte le comete iperboliche dovrebbero* ». Prego caldamente il lettore di verificare la dicitura, per accertarsi egli stesso, con i propri occhi, dell'esattezza di quanto scrivo.

Del resto, il teorema fondamentale nell'urto, è stato trovato da me (Nota I); ed io non credo di essere illogico a tal punto da dare esempi contrarii ad una proposizione, che io stesso ho scoperto e dimostrato per primo.

La seconda osservazione dello Zarlatti non è meno stupefacente.

Siamo perfettamente d'accordo che *nel caso generale*, le perturbazioni dell'eccentricità e del parametro sono dello stesso ordine di grandezza. Ma io ho detto (*e l'ho stampato anche in corsivo perchè non sfugga all'attenzione del lettore*) che la (9) è valida quando la quantità di materia cosmica che cade sul sole, si supponga costante, cioè nel *caso in cui la massa sia funzione lineare del tempo*. Non comprendo però, perchè il Tomasetti e lo Zarlatti attribuiscono a me la (9). Ogni studioso di meccanica celeste sa benissimo che questa formola, che non solo non è errata, ma costituisce uno dei più eleganti risultati ottenuti in questa teoria, è dovuta al Lehmann; ed io ho detto chiaramente nella mia Nota che io non ho in questo altro merito che di esservi arrivato in due righe, partendo dalla (4), mentre il Lehmann v'impiega qualche pagina di calcolo. Non solo, ma ho anche citato scrupolosamente la rivista e il fascicolo in cui il Lehmann la pubblicò.

8. Termino questa Nota con una breve osservazione. Alla pag. 160 del Bollettino i due autori arrivano alla seguente conclusione: « Pour $F(t)$ « *croissant*, l'excentricité des coniques osculatrices est la somme d'une « fonction *décroissante* du temps et d'un terme *oscillant* ». È facile verificare l'inesattezza di questa conclusione ricorrendo al solito esempio dell'orbita terrestre, nel caso in cui la massa solare aumenti tutte le volte che la terra è all'afelio. Qui l'eccentricità va *crescendo e non presenta alcuna oscillazione.*

Inutile avvertire il lettore che io ho fatto costantemente uso di questo esempio, solo perchè è estremamente semplice: ma che se ne potrebbero trovare molti altri; anche imponendo ad $F(t)$ la condizione di essere continua, derivabile ecc.