ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Meccanica. — *Sulla trasformazione di alcuni integrali che si presentano nell'Idrodinamica* [1]. Nota del prof. T. Boggio, presentata dal Corrisp. E. Almansi.

1. . . . . . La formula (3) della Sua Nota, testè pubblicata neï Rendiconti di questa Accademia: *Sopra le azioni le quali si esercitano fra corpi che si muovono o si deformano entro una massa liquida*, dalla quale Ella ha dedotto così eleganti applicazioni ai corpi pulsanti, mi pare possa dedursi immediatamente dal teorema di Herz, sulla variazione del flusso.

Ecco in qual modo:

Sia $\mathbf{u}(P, t)$ un vettore funzione regolare di P e di t, cioè funzione finita e continua, colle derivate prime, del punto P e del tempo t; tale vettore sia definito in una regione S dello spazio, la quale supponiamo fissa o variabile col tempo.

Sia poi σ una superficie chiusa, contenuta in S, superficie che potrà comunque muoversi o deformarsi col tempo; e indichiamo con $\mathbf{v}$ la velocità del suo punto generico P all'istante t.

Il teorema di Herz sulla variazione del flusso, è allora espresso dalla formula [2]:

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{u}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\mathbf{n}\times\mathbf{u})}{\partial t}\, d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\, d\sigma \tag{1}$$

ove $\mathbf{n}$ è un vettore unitario, normale alla superficie σ.

Ciò premesso, poniamo

$$\mathbf{u} = \varphi\mathbf{a}\,,$$

ove $\mathbf{a}$ è un vettore costante, e φ è un numero funzione regolare di P e di t; ricordando che [3]

$$\mathrm{div}\,(\varphi\mathbf{a}) = \mathrm{grad}\,\varphi\times\mathbf{a}\,,$$

la (1) porge:

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\mathbf{n}\times\mathbf{a}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\varphi\mathbf{n}\times\mathbf{a})}{\partial t}\, d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\varphi\times\mathbf{a}\, d\sigma\,.$$

[1] Estratto di lettera del prof. T. Boggio al prof. E. Almansi.

[2] Cfr. Burali-Forti et Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique, et à la physique mathématique*, pag. 116, form. (12) (Paris, Hermann, a. 1910).

[3] Cfr. i citati *Éléments*, pag. 73, form. (4).

Ora, supponendo il vettore $\mathbf{a}$ unitario, e parallelo all'asse Ox, la quantità $\mathbf{n}\times\mathbf{a}$ vale il coseno dell'angolo che la normale forma coll'asse Ox, ed $\mathbf{n}\times\mathbf{v}$ è la proiezione (con segno), sulla normale, della velocità del punto P, mentre $\operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{a}$ vale la derivata parziale di φ rispetto ad x; la formula precedente coincide quindi colla Sua formula (3).

Ritenendo poi, nella formula precedente, $\mathbf{a}$ vettore costante arbitrario, esso può essere portato fuori degli integrali, e quindi, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$, si conclude:

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\mathbf{n}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\varphi\mathbf{n})}{\partial t}\,d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\operatorname{grad}\varphi\,d\sigma\,.$$

La (1) può considerarsi come una formula fondamentale, come lo è il teorema della divergenza, da cui essa è stata dedotta; da tale formula se ne possono dedurre moltissime altre, procedendo nell'identico modo con cui nell'opera: Burali-Forti et Marcolongo, *Transformations linéaires* (1) (Pavia, Mattei e C., a. 1912), dal citato teorema della divergenza si sono dedotte le altre formole di trasformazione di integrali, date nei nn. 55, 56, 58.

Così, ad es., ponendo $\mathbf{u} = \mathrm{K}\alpha\mathbf{w}$ nella (1), ove α è un'omografia vettoriale e $\mathbf{w}$ un vettore, funzioni regolari di P e di t, ed osservando che $\{T.\ l.$, pag. 32, [1]; e pag. 79, [3]$\}$

$$\mathbf{n}\times\mathrm{K}\alpha\mathbf{w} = \alpha\mathbf{n}\times\mathbf{w} \quad , \quad \operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha\mathbf{w}) = \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\alpha\frac{d\mathbf{w}}{d\mathrm{P}}\right) + \operatorname{grad}\alpha\times\mathbf{w}\,,$$

si ha:

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \alpha\mathbf{n}\times\mathbf{w}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\alpha\mathbf{n}\times\mathbf{w})}{\partial t}\,d\sigma + \\ + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\left\{\mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\alpha\frac{d\mathbf{w}}{d\mathrm{P}}\right) + \operatorname{grad}\alpha\times\mathbf{w}\right\}d\sigma\,.$$

Se il vettore $\mathbf{w}$ è costante, nell'ultimo integrale un termine si annulla; e portando poi il $\mathbf{w}$ fuori degli integrali, per l'arbitrarietà di esso, si deduce

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \alpha\mathbf{n}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\alpha\mathbf{n})}{\partial t}\,d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\operatorname{grad}\alpha\,d\sigma\,.$$

Se l'omografia α si riduce ad un numero φ, questa formula diventa identica alla (2).

Supponendo l'omografia α assiale, e cioè della forma $\mathbf{u}\wedge$, con $\mathbf{u}$ vettore funzione regolare di P e di t, questa formula porge, osservando che $\operatorname{grad}(\mathbf{u}\wedge) = -\operatorname{rot}\mathbf{u}$, $\{T.\ l.$, pag. 84, [2]$\}$,

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \mathbf{u}\wedge\mathbf{n}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\mathbf{u}\wedge\mathbf{n})}{\partial t}\,d\sigma - \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\operatorname{rot}\mathbf{u}\,d\sigma\,;$$

(1) Nel seguito, citeremo quest'opera colla notazione $\{T.\ l.\}$.

in particolare, supponendo $\mathbf{u} = \varphi(\mathrm{P} - \mathrm{O})$, ove φ è un numero funzione regolare di P e di t, ed osservando che $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O})$, $\{$*T. l.*, pag. 79, [2]$\}$, si ha:

$$(2') \quad \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma + \\ + \int_\sigma \mathbf{n} \times \mathbf{v} \,.\, (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \operatorname{grad} \varphi\, d\sigma\,.$$

Se la superficie σ fosse aperta, si otterrebbero formule analoghe alle precedenti, partendo dal teorema della variazione del flusso per le superficie aperte, che è espresso da (¹)

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \mathbf{n} \times \mathbf{u}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\mathbf{n} \times \mathbf{u})}{\partial t} d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n} \times [\mathbf{v} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{rot}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})]\, d\sigma\,.$$

2. Profittando dell'occasione, permetta che La intrattenga ancora su un'altra formula generalissima, che ha molte applicazioni nell'Idrodinamica.

Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ tre vettori funzioni finite e continue, colle loro derivate prime, del punto P, variabile in uno spazio finito e fisso τ, limitato dalla superficie chiusa σ.

La formula in questione è allora la seguente (²):

$$(3) \quad \int_\tau \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\mathbf{v}\right) \times \mathbf{w}\, d\tau = -\int_\sigma \mathbf{u} \times \mathbf{w} \,.\, \mathbf{v} \times \mathbf{n}\, d\sigma - \\ - \int_\tau \mathbf{u} \times \mathbf{w} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{v}\, d\tau - \int_\tau \left(\frac{d\mathbf{w}}{d\mathrm{P}}\mathbf{v}\right) \times \mathbf{u}\, d\tau\,,$$

ove $\mathbf{n}$ è un vettore unitario, normale a σ e diretto all'interno di τ.

La dimostrazione è semplicissima; si fa partendo dal teorema della divergenza, espresso dalla formula

$$(4) \quad \int_\tau \operatorname{div} \mathbf{u}\, d\tau = -\int_\sigma \mathbf{n} \times \mathbf{u}\, d\sigma\,, \quad \{\textit{T. l.}, \text{pag. } 108, [1]\},$$

ponendovi $(\mathbf{u} \times \mathbf{w})\,\mathbf{v}$ al posto di $\mathbf{u}$. Osservando che

$$\operatorname{div}[(\mathbf{u} \times \mathbf{w})\,\mathbf{v}] = \mathbf{u} \times \mathbf{w} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{grad}(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{v}\,, \quad \{\textit{T. l.}, \text{pag. } 79, [2]\}$$

$$= \mathbf{u} \times \mathbf{w} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{v} + \left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\mathbf{w} + \mathrm{K}\frac{d\mathbf{w}}{d\mathrm{P}}\mathbf{u}\right) \times \mathbf{v}\,, \quad \{\textit{T. l}, \text{pag. } 81, [1]\}$$

$$= \mathbf{u} \times \mathbf{w} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{v} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\mathbf{v}\right) \times \mathbf{w} + \left(\frac{d\mathbf{w}}{d\mathrm{P}}\mathbf{v}\right) \times \mathbf{u}\,, \quad \{\textit{T. l.}, \text{pag. } 32, [1]\},$$

(¹) Cfr. i citati *Éléments*, pag. 115, form. (11).

(²) Questa formula è pure stata riportata nella recente opera: Burali-Forti et Marcolongo, *Applications à la mécanique et à la physique*, pag. 140 (Pavia, Mattei e C., a. 1913).

si deduce, dalla (4),

$$\int_\tau \left[\mathbf{u}\times\mathbf{w}\,.\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{v}\right)\times\mathbf{w} + \left(\frac{d\mathbf{w}}{dP}\,\mathbf{v}\right)\times\mathbf{u} \right] d\tau = -$$

$$- \int_\sigma \mathbf{u}\times\mathbf{w}\,.\,\mathbf{n}\times\mathbf{v}\,d\sigma\,,$$

che è precisamente la (3).

Se i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, sono, all'infinito, infinitesimi d'ordine conveniente, la (3) vale pure se τ indica il campo indefinito esterno alla superficie σ.

Per mezzo della (3) si possono dedurre facilmente, dal principio di Hamilton, le equazioni idrodinamiche di Eulero. Adoperando invece gli ordinarî metodi cartesiani, i calcoli risultano complicatissimi, come si può vedere nell'opera di W. Wien, *Lehrbuch der Hydrodynamik*, § 10, pag. 47 (Leipzig, Hirzel, a. 1900), ove si trova, fra altro, una formula che occupa circa un'intera pagina!

Supponendo che il vettore $\mathbf{w}$ sia costante, esso può essere portato fuori degli integrali; e allora, per l'arbitrarietà di $\mathbf{w}$, dalla (3) si trae

$$(5) \qquad \int_\tau \frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{v}\,d\tau = - \int_\sigma \mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}\times\mathbf{n}\,d\sigma - \int_\tau \mathbf{u}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,d\tau\,.$$

Ponendo, nella (5), $(P-O)\wedge\mathbf{u}$ al posto di $\mathbf{u}$, ove O indica un punto fisso, si deduce:

$$(6) \qquad \int_\tau (P-O)\wedge\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{v}\right) d\tau = - \int_\sigma (P-O)\wedge\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}\times\mathbf{n}\,d\sigma -$$

$$- \int_\tau (P-O)\wedge\mathbf{u}\,.\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,d\tau + \int_\tau \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\,d\tau\,.$$

Queste formule sono utilissime in Idrodinamica. Ne ho già fatte diverse applicazioni [1] al calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide.

Le equazioni cartesiane equivalenti, che sono alquanto complicate, sono state assegnate e adoperate dal prof. Cisotti per stabilire il paradosso del d'Alembert [2].

(1) Boggio, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito*, Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIX, parte 2ª, a. 1910; *Calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide*, Rendiconti di questa Accademia, ser. 5ª, vol. XX, 1° sem. 1911.

(2) Cisotti, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito*, Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIX, parte 2ª, a. 1910.

Se, in particolare, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$, ove φ è un numero funzione regolare di P, la (5) porge, applicando formule note {*T. l.*, pag. 81, [1]; pag. 77, [3]},

$$\frac{1}{2}\int_\tau \operatorname{grad}(\operatorname{grad}\varphi)^2\, d\tau = -\int_\sigma \operatorname{grad}\varphi \,.\, \operatorname{grad}\varphi \times \mathbf{n}\, d\sigma - \\ -\int_\tau \operatorname{grad}\varphi \,.\, \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\, d\tau .$$

Il primo membro, col teorema del gradiente {*T. l.*, pag. 108, [3]}, si trasforma in $-\int_\sigma (\operatorname{grad}\varphi)^2\, \mathbf{n}\, d\sigma/2$; perciò dall'eguaglianza precedente risulta:

$$\int_\sigma \mathbf{U}\, d\sigma = -\int_\tau \operatorname{grad}\varphi \,.\, \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\, d\tau , \tag{7}$$

avendo posto, per brevità,

$$\mathbf{U} = \operatorname{grad}\varphi \,.\, \operatorname{grad}\varphi \times \mathbf{n} - (\operatorname{grad}\varphi)^2\, \mathbf{n}/2 . \tag{8}$$

Questa formula è dovuta al prof. Levi-Civita (1), il quale ne ha fatto utili applicazioni.

Se la funzione φ è armonica (cioè $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0$), il secondo membro della (7) sparisce, e si ottiene la formula (7) della Sua Nota.

Nelle stesse ipotesi, la (6) porge:

$$\int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\varphi)^2\, d\tau = -\int_\sigma (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \operatorname{grad}\varphi \,.\, \operatorname{grad}\varphi \times \mathbf{n}\, d\sigma - \\ -\int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \operatorname{grad}\varphi \,.\, \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\, d\tau .$$

Il primo membro può scriversi $-\int_\tau \operatorname{rot}\left[(\operatorname{grad}\varphi)^2 (\mathrm{P}-\mathrm{O})\right] d\tau/2$; quindi, applicando il teorema della rotazione {*T. l.*, pag. 108, [2]}, esso si trasforma in $-\int_\sigma (\operatorname{grad}\varphi)^2 (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma/2$; e perciò, ricordando la (8), si ha la formula seguente, analoga alla (7):

$$\int_\sigma (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{U}\, d\sigma = -\int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \operatorname{grad}\varphi \,.\, \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\, d\tau . \tag{9}$$

Se la funzione φ è armonica, il secondo membro si annulla.

3. Sia ora C un corpo, che potrà comunque muoversi e deformarsi col tempo; e sia σ la sua superficie.

Supponiamo, come ha fatto Lei, che il corpo C sia immerso in una massa liquida, limitata, oltrechè da σ, da una superficie Σ, la quale potrà

(1) Levi-Civita, *Sulla contrazione delle vene liquide*, Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIV, parte 2ª, a. 1905.

risultare di più superficie, fisse o mobili, rigide o deformabili, ed anche coincidere, in tutto o in parte, colla sfera all'infinito.

L'azione esercitata sul corpo C dal liquido si può caratterizzare per mezzo del vettore risultante $\mathbf{R}$, e del momento risultante $\mathbf{M}$ (rispetto ad un punto arbitrario O) del sistema di pressioni elementari che il liquido esercita sui singoli elementi $d\sigma$ della superficie σ del corpo C.

I due vettori $\mathbf{R}, \mathbf{M}$ sono espressi da

$$\mathbf{R} = -\int_\sigma p\mathbf{n}\, d\sigma\,,$$

$$\mathbf{M} = -\int_\sigma p(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma\,,$$

ove p è l'intensità della pressione in un qualunque punto P di σ, e $\mathbf{n}$ è un vettore unitario, normale a σ, e diretto all'interno della massa liquida.

Se φ è il potenziale di velocità, e si suppone incompressibile il liquido, e la sua densità eguale ad 1, le equazioni idrodinamiche si compendiano nell'unica relazione:

$$p = -\frac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \text{cost}^e,$$

mentre la condizione d'incompressibilità esprime che la funzione φ deve essere armonica.

Si ha allora, dalle formule precedenti,

$$\mathbf{R} = \int_\sigma \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2\,\mathbf{n}\, d\sigma + \int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathbf{n}\, d\sigma,$$

$$\mathbf{M} = \int_\sigma \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2\,(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma + \int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma\,.$$

Trasformiamo gli ultimi termini colle (2), (2′); risulta:

$$\mathbf{R} = \int_\sigma \left\{ \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2\,\mathbf{n} - \mathbf{v}\times\mathbf{n} \,.\, \operatorname{grad}\varphi \right\} d\sigma + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\mathbf{n}\, d\sigma\,,$$

$$\mathbf{M} = \int_\sigma \left\{ \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2\,(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n} - \mathbf{v}\times\mathbf{n} \,.\, (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \operatorname{grad}\varphi \right\} d\sigma + \\ + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma.$$

Ora osserviamo che, in un punto P di σ, $\mathbf{v}\times\mathbf{n}$ essendo la proiezione, sulla normale, della velocità di P, rappresenterà pure la proiezione, sulla stessa normale, della velocità della particella liquida attigua a P; onde si avrà

$$\mathbf{v}\times\mathbf{n} = \operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{n}\,;$$

sostituendo nelle formule precedenti, e ricordando la (8), si ottiene:

$$(10)\quad \begin{cases} \mathbf{R} = -\int_\sigma \mathbf{U}\, d\sigma + \dfrac{d}{dt}\int_\sigma \varphi \mathbf{n}\, d\sigma\,, \\ \mathbf{M} = -\int_\sigma (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{U}\, d\sigma + \dfrac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma\,. \end{cases}$$

Indichiamo ora con s una superficie chiusa, che contenga C nel suo interno, e tale che lo spazio compreso fra σ ed s sia totalmente occupato dal liquido. Potremo applicare le (7), (9) all'insieme di queste due superficie, ed avremo, φ essendo armonica,

$$\int_\sigma \mathbf{U}\, d\sigma + \int_s \mathbf{U}\, ds = 0 \quad , \quad \int_\sigma (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{U}\, d\sigma + \int_s (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{U}\, ds = 0\ ;$$

quindi, dalle (10), segue:

$$\mathbf{R} = \int_s \mathbf{U}\, ds + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi \mathbf{n}\, d\sigma\,,$$

$$\mathbf{M} = \int_s (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{U}\, ds + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma\,.$$

La prima di queste due formule concorda colla Sua formula (8).

Meccanica. — *Applicazione dei potenziali newtoniani della elasticità.* Nota II di Pietro Burgatti, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

5. La nota estensione dei metodi di Green all'equazione dell'elasticità, quando venga fatta nella maniera più opportuna, fa appunto vedere che i potenziali definiti nella Nota precedente costituiscono gli elementi analitici fondamentali di cotesta teoria.

Indicando con β e β', $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s}'$ rispettivamente due omografie e due vettori funzioni regolari dei punti P d'un campo S limitato dalla superficie σ, e soddisfacenti alla *relazione di reciprocità*

$$(7)\qquad \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\beta\, \frac{d\mathbf{s}'}{d\mathrm{P}}\right) = \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\beta'\, \frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{P}}\right),$$

si ottiene, da una nota formula [1],

$$(8)\qquad \int_\mathrm{S} \mathrm{grad}\, \beta \times \mathbf{s}' . d\mathrm{S} + \int_\sigma \beta \mathbf{n} \times \mathbf{s}' . d\sigma = \\ = \int_\mathrm{S} \mathrm{grad}\, \beta' \times \mathbf{s}' . d\mathrm{S} + \int_\sigma \beta' \mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma\ ;$$

[1] *Analyse vect. générale*, tomo I, pag. 111, formula (2). Per le applicazioni dell'analisi vettoriale alla teoria dell'elasticità, vedi il volume 2° della stessa opera.