ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

sostituendo nelle formule precedenti, e ricordando la (8), si ottiene:

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathbf{R} = -\int_\sigma \mathbf{U}\, d\sigma + \dfrac{d}{dt}\int_\sigma \varphi \mathbf{n}\, d\sigma\,, \\ \mathbf{M} = -\int_\sigma (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{U}\, d\sigma + \dfrac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma\,. \end{cases}$$

Indichiamo ora con s una superficie chiusa, che contenga C nel suo interno, e tale che lo spazio compreso fra σ ed s sia totalmente occupato dal liquido. Potremo applicare le (7), (9) all'insieme di queste due superficie, ed avremo, φ essendo armonica,

$$\int_\sigma \mathbf{U}\, d\sigma + \int_s \mathbf{U}\, ds = 0 \quad , \quad \int_\sigma (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{U}\, d\sigma + \int_s (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{U}\, ds = 0\,;$$

quindi, dalle (10), segue:

$$\mathbf{R} = \int_s \mathbf{U}\, ds + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi \mathbf{n}\, d\sigma\,,$$

$$\mathbf{M} = \int_s (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{U}\, ds + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma\,.$$

La prima di queste due formule concorda colla Sua formula (8).

Meccanica. — *Applicazione dei potenziali newtoniani della elasticità.* Nota II di PIETRO BURGATTI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

5. La nota estensione dei metodi di Green all'equazione dell'elasticità, quando venga fatta nella maniera più opportuna, fa appunto vedere che i potenziali definiti nella Nota precedente costituiscono gli elementi analitici fondamentali di cotesta teoria.

Indicando con β e β', $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s}'$ rispettivamente due omografie e due vettori funzioni regolari dei punti P d'un campo S limitato dalla superficie σ, e soddisfacenti alla *relazione di reciprocità*

$$(7)\qquad \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\beta\,\frac{d\mathbf{s}'}{d\mathrm{P}}\right) = \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\beta'\,\frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{P}}\right),$$

si ottiene, da una nota formula [1],

$$(8)\qquad \int_{\mathrm{S}} \mathrm{grad}\,\beta \times \mathbf{s}' . d\mathrm{S} + \int_\sigma \beta\mathbf{n} \times \mathbf{s}' . d\sigma = \\ = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{grad}\,\beta' \times \mathbf{s}' . d\mathrm{S} + \int_\sigma \beta'\mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma\,;$$

[1] *Analyse vect. générale*, tomo I, pag. 111, formula (2). Per le applicazioni dell'analisi vettoriale alla teoria dell'elasticità, vedi il volume 2° della stessa opera.

relazione fondamentale, che contiene tutte le relazioni del tipo di quelle comunemente chiamate lemmi di Green nella teoria dei potenziali ordinarii.

Supponiamo che sia grad $\beta' = 0$, e che $\mathbf{s}'$ risulti infinito in un solo punto O di S come $\frac{1}{r}$ $(r = \mathrm{mod}\,(\mathrm{P} - \mathrm{O}))$, pur ritenendo soddisfatta la (7). In questo caso la (8) non ha più luogo. Possiamo però isolare il punto O con una sferetta σ_0 di centro O e raggio ε, e applicare la (8) allo spazio S_1 compreso fra σ e σ_0, ove $\beta\beta'$, $\mathbf{s}\mathbf{s}'$ son regolari. Si ottiene

$$(8') \qquad \int_{\mathrm{S}_1} \mathrm{grad}\,\beta \times \mathbf{s}'\, d\mathrm{S}_1 + \int_\sigma (\beta\mathbf{n} \times \mathbf{s}' - \beta'\mathbf{n} \times \mathbf{s})\, d\sigma = \\ = \int_{\sigma_0} \beta'\,\mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma_0 - \int_{\sigma_0} \beta\mathbf{n} \times \mathbf{s}'\, d\sigma_0 .$$

Essendo $d\sigma_0 = \varepsilon^2\, d\Omega$, ove $d\Omega$ è l'elemento superficiale della sfera unitaria, si ha

$$\int_{\sigma_0} \beta\mathbf{n} \times \mathbf{s}'\, d\sigma_0 = \varepsilon \int_\Omega \beta\mathbf{n} \times \varepsilon\mathbf{s}'\, d\Omega ;$$

che, per le ipotesi fatte, tende a zero con ε. Inoltre

$$\int_{\sigma_0} \beta'\mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma_0 = \mathbf{s}_1 \times \varepsilon^2 \int_\Omega \beta'\mathbf{n}\, d\Omega ,$$

ove $\mathbf{s}_1$ è un opportuno valore di $\mathbf{s}$ fra quelli che $\mathbf{s}$ assume sopra σ_0. Supposto

$$(9) \qquad \lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon^2 \int \beta'\mathbf{n}\, d\Omega = \mathbf{c} \ (\text{costante}) ,$$

la (8') diventa, al limite,

$$(10) \qquad \mathbf{s}(\mathrm{O}) \times \mathbf{c} = \int_\sigma (\beta\mathbf{n} \times \mathbf{s}' - \beta'\mathbf{n} \times \mathbf{s})\, d\sigma + \int_{\mathrm{S}} \mathrm{grad}\,\beta \times \mathbf{s}'\, d\mathrm{S} ,$$

ove $\mathbf{s}(\mathrm{O})$ è il valore di $\mathbf{s}$ nel punto O. Altra formula fondamentale, che contiene tutte le formule particolari di questo tipo che si adoperano nella fisica matematica.

Ciò posto, veniamo ai problemi dell'equilibrio elastico dei corpi omogenei isotropi. Nelle formule precedenti, siano $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s}'$ gli spostamenti relativi a due deformazioni elastiche infinitesime; β e β' le corrispondenti omografie delle tensioni interne (dilatazioni). La (7) è soddisfatta, perchè $\mathrm{I}_1\left(\beta \frac{d\mathbf{s}'}{d\mathrm{P}}\right)$ e $\mathrm{I}_1\left(\beta' \frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{P}}\right)$ vengono a rappresentare la stessa forma bilineare nelle componenti delle definite deformazioni. Inoltre prendiamo $\mathbf{s}' = \gamma\mathbf{a}$, che è il potenziale newtoniano elementare dell'elasticità definito nella Nota precedente. Risulta, allora,

$$\operatorname{grad}\beta' \equiv \mathrm{E}(\gamma\mathbf{a}) = 0 ;$$

e, per le proprietà dette, si vede che è applicabile la (10). Bisognerà però calcolare il limite di $\int_{\sigma_0} \beta'\mathbf{n}\, d\sigma_0$ sulla sferetta di raggio ε, quando ε tende a zero. Per note formule, si ha, nel nostro caso [1],

$$-\frac{\beta'\mathbf{n}}{\varrho} = (\Omega^2 - 2\omega^2)\operatorname{div}(\gamma\mathbf{a})\,.\,\mathbf{n} - 2\omega^2\,\mathrm{D}\frac{d\gamma\mathbf{a}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{n}. \qquad (\varrho = \text{densità})$$

Prendendo $\gamma\mathbf{a}$ nella forma

$$\gamma\mathbf{a} = (\Omega^2 + \omega^2)\frac{\mathbf{a}}{r} - (\Omega^2 - \omega^2)\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times\mathbf{a}\right)(\mathrm{P}-\mathrm{O}),$$

dopo alcuni calcoli, che qui omettiamo per brevità, si trova

$$-\frac{\beta'\mathbf{n}}{2\varrho\omega^2} = -\omega^2\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times\mathbf{a}\right)\mathbf{n} + \omega^2\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times\mathbf{n}\right)\mathbf{a} +$$

$$+\,\Omega^2(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\operatorname{grad}\frac{1}{r} - (\Omega^2 - \omega^2)\left(\mathbf{a}\times\frac{\partial\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)(\mathrm{P}-\mathrm{O});$$

e integrando quindi sopra σ_0, si ottiene facilmente ($\mathbf{n}$ normale esterna a σ_0)

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\sigma_0}\beta'\mathbf{n}\,d\sigma_0 = 8\pi\omega^2\Omega^2\varrho\mathbf{a}\,.$$

Questo è il valore di $\mathbf{c}$ nel caso presente; perciò la (10) diventa

$$8\pi\omega^2\Omega^2\varrho\mathbf{s}(\mathrm{O})\times\mathbf{a} = \int_{\mathrm{S}}\operatorname{grad}\beta\times\gamma\mathbf{a}\,d\mathrm{S} + \int_\sigma\beta\mathbf{n}\times\gamma\mathbf{a}\,d\sigma - \int_\sigma\beta'\mathbf{n}\times\mathbf{s}\,d\sigma.$$

Indicando con $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}_\sigma$ rispettivamente le forze di massa e superficiali che conservano l'equilibrio nella deformazione definita da $\mathbf{s}$, si ha per le equazioni dell'equilibrio,

$$\operatorname{grad}\beta = \varrho\mathbf{F} \quad , \quad \beta\mathbf{n} = \mathbf{F}_\sigma ;$$

perciò la precedente diventa

$$8\pi\omega^2\Omega^2\,\mathbf{s}(\mathrm{O})\times\mathbf{a} = \int_{\mathrm{S}}\mathbf{F}\times\gamma\mathbf{a}\,d\mathrm{S} + \frac{1}{\varrho}\int_\sigma\mathbf{F}_\sigma\times\gamma\mathbf{a}\,.\,d\sigma - \int_\sigma\frac{\beta'\mathbf{n}}{\varrho}\times\mathbf{s}\,d\sigma\,.$$

[1] *Analyse vect. gén.*, tomo II, cap. II.

Infine, introducendo l'omografia

$$\lambda = (\Omega^2 - 2\omega^2)\, \mathrm{H}(\operatorname{grad} \gamma\, , \mathbf{n}) + 2\omega^2 \frac{d\gamma}{d\mathrm{P}}\, \mathbf{n} - \omega^2\, \mathrm{H}'(\operatorname{Rot} \gamma\, , \mathbf{n}) = \lambda(\gamma\, , \mathbf{n}),$$

funzione di γ e $\mathbf{n}$, facilmente si trova

$$-\beta'\mathbf{n} = \varrho\lambda(\gamma\, , \mathbf{n})\, \mathbf{a} \text{ [1]}.$$

Allora l'ultima formula diventa

$$8\pi\omega^2\Omega^2\, \mathbf{s}(\sigma) \times \mathbf{a} = \int_{\mathrm{S}} \mathbf{F} \times \gamma\mathbf{a}\, d\mathrm{S} + \int_\sigma \mathbf{F}_\sigma \times \gamma\mathbf{a}\, d\sigma + \int_\sigma \lambda(\gamma\, , \mathbf{n})\, \mathbf{a} \times \mathbf{s}\, d\sigma$$

$$= \int_{\mathrm{S}} \gamma\mathbf{F} \times \mathbf{a}\, d\mathrm{S} + \int_\sigma \gamma\mathbf{F}_\sigma \times \mathbf{a}\, ds + \int_\sigma \mathbf{K}\lambda(\gamma, \mathbf{n})\, \mathbf{s} \times \mathbf{a}\, d\sigma\,;$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$,

$$\text{(11)} \qquad 8\pi\omega^2\Omega^2\, \mathbf{s}(\mathrm{O}) = \int_{\mathrm{S}} \gamma\, \mathbf{F}\, d\mathrm{S} + \int_\sigma \gamma\mathbf{F}_\sigma\, d\sigma + \int_\sigma \mathbf{K}\, \lambda(\gamma\, , \mathbf{n})\, \mathbf{s}\, d\sigma\, ,$$

che compendia, in sostanza, sotto una nuova forma, le note formule fondamentali del Somigliana. I primi due integrali e una parte del terzo, quello corrispondente al termine medio di λ, sono appunto i potenziali newtoniani dell'elasticità considerati in principio. Si ha dippiù, nel terzo integrale, una parte dipendente da particolari potenziali ordinarii; per la ragione che alla equazione $\mathrm{E}\mathbf{s} = 0$ si soddisfa anche in modo speciale mediante certi potenziali ordinarii. Come si vede, dunque, i detti potenziali dell'elasticità entrano come elementi essenziali nelle formule fondamentali, e la conoscenza *a priori* delle loro proprietà facilita lo studio dei varii problemi, e rende più espressive le formule. Anche il metodo diretto qui seguito per giungere alla (11), mi sembra notevole.

6. Introducendo l'operatore

$$\mathrm{E}' = \Omega^2\Delta' - (\Omega^2 - \omega^2) \operatorname{grad} \operatorname{div}$$

(che potrà chiamarsi l'*associato di* E, perchè si deduce da E con lo scambio di Ω^2 con ω^2), si deduce

$$\gamma\mathbf{a} = \Omega^2\Delta'_0(r\mathbf{a}) - (\Omega^2 - \omega^2) \operatorname{grad}_0 \operatorname{div}_0(r\mathbf{a}) = \mathrm{E}'_0(r\mathbf{a})\, .$$

Osservando poi che $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}_\sigma$ non dipendono da O, subito risulta

$$\int_{\mathrm{S}} \gamma\mathbf{F}\, d\mathrm{S} = \mathrm{E}'_0\left(\int_{\mathrm{S}} r\mathbf{F}\, d\mathrm{S}\right) \quad , \quad \int_\sigma \gamma\,\mathbf{F}_\sigma\, d\sigma = \mathrm{E}'_0\left(\int_\sigma r\,\mathbf{F}_\sigma\, d\sigma\right).$$

[1] In generale con $\mathrm{H}'(\alpha\, , \mathbf{a})$ intendiamo quell'omografia funzione dell'omografia α, e del vettore $\mathbf{a}$, tale che per ogni $\mathbf{b}$ risulti $\mathrm{H}'(\alpha, \mathbf{a})\, \mathbf{b} = \alpha\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$.

Inoltre, essendo, per le cose dette,

$$\gamma = \Omega^2 \Delta_0 r - (\Omega^2 - \omega^2) \frac{d \operatorname{grad}_0 r}{dr},$$

facilmente si trova

$$\left(\frac{d\gamma}{dP}\,\mathbf{n}\right)\mathbf{s} = \mathbf{E}'_0\left(\mathbf{s}\,\frac{\partial r}{\partial n}\right);$$

e, quindi,

$$\int_\sigma \frac{\partial \gamma}{\partial n}\,\mathbf{s}\,.\,d\sigma = \mathbf{E}'_0\left(\int_\sigma \frac{\partial r}{\partial n}\,\mathbf{s}\,.\,d\sigma\right).$$

Queste formole fanno vedere le relazioni che passano fra i potenziali newtoniani dell'elasticità e gli ordinarii potenziali (vettori) biarmonici; e dànno ragione dell'importanza che questi ultimi acquistarono nelle moderne ricerche sulla teoria dell'elasticità (specialmente nei lavori del prof. Almansi).

Rispetto all'ultimo integrale della (11), con opportuni calcoli, che qui tralasciamo, si trova

$$\int_\sigma \mathbf{K}\lambda(\gamma,\mathbf{n})\,\mathbf{s}\,.\,d\sigma = \mathbf{E}'_0\left\{\omega^2(2\omega^2 - \Omega^2)\operatorname{grad}_0 \boldsymbol{\varphi} - \omega^2 \operatorname{rot}_0 \mathbf{n} + 2\omega^2 \int_\sigma \frac{\partial r}{\partial n}\,\mathbf{s}\,.\,d\sigma\right\},$$

ove

$$\boldsymbol{\varphi} = \int_\sigma (\mathbf{n} \times \mathbf{s})\, r\, d\sigma \quad , \quad \mathbf{n} = \int_\sigma (\mathbf{n} \wedge \mathbf{s})\, r\, d\sigma\,;$$

per conseguenza, posto

$$\mathbf{s}_1 = \int_S r\,\mathbf{F}\,dS + \frac{1}{\varrho}\int_\sigma r\,\mathbf{F}_\sigma\,d\sigma + \\ + \omega^2\left\{(2\omega^2 - \Omega^2)\operatorname{grad}_0 \boldsymbol{\varphi} - \operatorname{rot}_0 \mathbf{n} + 2\int_\sigma \frac{\partial r}{\partial n}\,\mathbf{s}\,d\sigma\right\},$$

la (11) assume la forma

$$8\pi\omega^2\Omega^2\,\mathbf{s}(0) = \mathbf{E}'_0\,\mathbf{s}_1\,. \tag{12}$$

Dunque ogni $\mathbf{s}$, atto a rappresentare la soluzione d'un problema d'equilibrio elastico, può assumere la forma (12). Questa proposizione è l'inversa di un'altra, ben nota, del Boussinesq; secondo la quale si può sempre soddisfare all'equazione indefinita dell'equilibrio elastico con

$$\bar{s} = \mathbf{E}'(\bar{u}),\ \text{ove}\ \ \Delta'\Delta'\bar{u} = -\frac{1}{\omega^2\Omega^2}\,\mathbf{F}\,.$$