ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Meccanica. — *Sopra le formole di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica.* Nota I di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

La presente Nota è dedicata alla ricerca delle formole di rappresentazione degli integrali delle equazioni dei piccoli moti dei corpi elastici isotropi, cioè di quelle formole della dinamica elastica che corrispondono alla formola di Green relativa all'equazione di Laplace, o alle formole di Somigliana relative alle equazioni dell'equilibrio elastico. La ragione che mi spinge alla presente pubblicazione, dipende dal porre in evidenza il carattere, che le dette formole hanno, di dare lo stato di vibrazione all'esterno di una superficie σ chiusa, quando questa si può ritenere bordo di onda all'inizio del moto, cioè quando le funzioni date sòpra σ sono definite solo per gli istanti successivi ad uno assegnato. Le formole di rappresentazione richieste saranno perciò di utilità nella risoluzione del problema *esterno* della dinamica elastica nella forma che ad esso diedi ultimamente [1].

Il metodo qui seguìto mostra la non necessarietà di imporre condizioni di convergenza all'infinito delle funzioni incognite, poichè ad ogni istante il moto è racchiuso internamente a superficie tutte al finito; e inoltre non richiede nel moto quel carattere di permanenza che sarebbe acquistato solo per tensioni e velocità agenti *da tempo infinitamente remoto sulla superficie σ portante i dati.*

In un'altra Nota mostrerò che le formole trovate, come la formola di Green per l'equazione di Laplace, forniscono, nella forma che qui è data ad esse, un metodo di integrazione per le equazioni dei piccoli moti dei corpi elastici.

Noterò, infine, che le considerazioni qui svolte si riattaccano ai metodi introdotti dal Volterra [2] nella scienza, e già con eguale intendimento applicati dal Tedone nella Memoria: *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei, isotropi* (Acc. reale delle scienze di Torino, tomo XLVII, 1897), allo stesso problema delle vibrazioni dei corpi elastici. Il metodo da me seguìto si differenzia da quello di quest'ultimo autore per la concezione fisica della propagazione di onde, e quindi per gli spazî a cui le integrazioni sono estese.

[1] Nella mia Memoria in corso di pubblicazione: *Sopra il problema esterno della Dinamica dei mezzi elastici isotropi,* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LXIV, serie I.

[2] *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes,* Acta math., tomo XVIII.

1. Il modo con cui intendo la propagazione del moto all'esterno di una superficie σ chiusa convessa (moto generato in uno spazio indefinito, occupato da un mezzo elastico, isotropo, nel quale è una cavità), è il seguente: Sopra σ, da un istante $t = 0$ in poi, sono date delle tensioni (o delle velocità); inizialmente il mezzo è in quiete. Ad un istante $t > 0$ qualunque, considero due superficie $\sigma_t^{(a)}$, $\sigma_t^{(b)}$ ottenute da σ portando sopra le sue normali verso l'esterno, a partire dai punti di σ stessa, dei tratti at, bt. Lo spazio compreso tra σ e $\sigma_t^{(b)}$ contiene i punti la cui vibrazione è decomponibile in una parte trasversale, ed una longitudinale. Per la continuità dello spostamento, la vibrazione longitudinale si annulla sopra $\sigma_t^{(a)}$, la trasversale sopra $\sigma_t^{(b)}$. La posizione del problema riesce più chiara quando ci riferiamo allo spazio a quattro dimensioni (x, y, z, t), considerando quindi il tempo come una coordinata. Considero allora il cilindroide Σ a generatrici parallele all'asse t la cui sezione con l'iperpiano $t = 0$ è la superficie σ, e le due ipersuperficie Σ_a, Σ_b, le cui generatrici hanno come proiezioni sopra $t = 0$ le normali a σ, e le cui pendenze, rispetto allo stesso iperpiano, sono $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$. Le sezioni di queste ipersuperficie con l'iperpiano $t = \tau$ sono le superficie $\sigma_t^{(a)}$, $\sigma_t^{(b)}$. Le funzioni che caratterizzano la vibrazione longitudinale sono definite nello spazio compreso tra Σ e Σ_a; quelle che definiscono la vibrazione trasversale sono definite tra Σ e Σ_b. Le prime si annullano sopra Σ_a, le altre sopra Σ_b. Entrambe sono determinate dal generare tensioni sopra Σ, equilibranti quelle date.

Ricercheremo le formole di rappresentazione per gli integrali di questo problema.

2. Il mezzo possa propagare solo onde longitudinali (mezzo fluido). Sia c la velocità di propagazione delle onde; l'equazione caratteristica del moto sarà:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi . \tag{1}$$

La formola di rappresentazione degli integrali di questa equazione (formola di Kirchhoff) si otterrà considerando, oltrechè il cilindroide Σ e la Σ_c (costruita come è indicato nel num. precedente), un cono Σ_1 di equazione

$$(t - \tau)^2 = \frac{r^2}{c^2} \qquad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} ,$$

un cilindro Σ_2 di raggio ϱ e il cui asse è la retta

$$x = \xi \ , \ y = \eta \ , \ z = \zeta .$$

Nello spazio compreso tra $\Sigma, \Sigma_c, \Sigma_1, \Sigma_2$ si ha, se φ, ψ sono funzioni regolari in questo spazio e soddisfacenti la (1),

$$(2) \qquad \int_{\Sigma+\Sigma_c+\Sigma_1+\Sigma_2} (\varphi D_\nu \psi - \psi D_\nu \varphi)\, d\Sigma = 0,$$

nella quale si è posto

$$D_\nu = c^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \nu} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial t}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial t},$$

ν essendo la normale interna. Si ponga

$$\psi = \frac{t - \tau + \frac{r}{c}}{r}.$$

Si ha perciò, sopra Σ_1,

$$\psi = D_\nu \psi = 0.$$

Sopra Σ_c si ha poi:

$$\varphi = D_\nu \varphi = 0.$$

Quindi, osservando che sopra Σ si ha

$$D_\nu \varphi = c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \qquad n = \text{normale esterna a } \sigma,$$

e sopra Σ_2

$$D_\nu \varphi = c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho},$$

con un passaggio al limite per $\varrho = 0$, dalla (2) si ricava

$$(3) \qquad \int_\sigma d\sigma \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} \left(-\varphi \frac{t-\tau}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{t - \tau + \frac{r}{c}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dt = 4\pi \int_{\frac{r_0}{c}}^{\tau} \varphi \,.\, (t - \tau)\, dt,$$

dove r_0 è la minima distanza del punto (ξ, η, ζ) dalla σ.

Dalla (3), con due derivazioni rispetto a τ, si ricava la formola di Kirchhoff [1].

[1] Per i dettagli di questo calcolo, cfr. la mia Nota, *Sulla formola di Kirchhoff per la propagazione delle onde*, Acc. sc. Torino, vol. 48, 1912-13. Nella seconda e penultima formola di pag. 397 vi è un errore che, però, nessuna conseguenza porta sulla esattezza del risultato.

Ho voluto, per sommi capi, ripetere il ragionamento che conduce, mi sembra, nel modo più naturale, alla formola di Kirchhoff, per mostrare che mediante esso, con facile generalizzazione, si può giungere pure rapidamente alle formole di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica. Basterà, in luogo della (2), applicare la formola di reciprocità del Betti, e, in luogo dell'integrale $\dfrac{t-\tau+\frac{r}{c}}{r}$, usare degli spostamenti dovuti ad un centro di forza (formole di Stokes) nella forma ad essi data dal Somigliana [1] e da me lievemente modificata nella Memoria già citata.

3. Premetto una formola relativa alle equazioni dei piccoli moti dei corpi elastici, equazioni che pongo sotto la forma:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial W}{\partial e_{xx}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial W}{\partial e_{xy}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial W}{\partial e_{xz}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

La W è il potenziale elastico unitario, ed $e_{xx}, \ldots$ sono le componenti di deformazione. Sieno (u, v, w) (u', v', w') due terne di funzioni regolari in uno spazio S a quattro dimensioni, limitato da una ipersuperficie Σ chiusa. In S, queste due terne di funzioni verifichino le (4). Dal sistema (4), con metodi notissimi, si ricava:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(u'\dfrac{\partial u}{\partial t} + v'\dfrac{\partial v}{\partial t} + w'\dfrac{\partial w}{\partial t} - u\dfrac{\partial u'}{\partial t} - v\dfrac{\partial v'}{\partial t} - w\dfrac{\partial w'}{\partial t}\right) = \\ \qquad = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u'\dfrac{\partial W}{\partial e_{xx}} + v'\dfrac{\partial W}{\partial e_{xy}} + w'\dfrac{\partial W}{\partial e_{xz}}\right) + \cdots \\ \qquad - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial e'_{xx}} + v\dfrac{\partial W'}{\partial e'_{xy}} + w\dfrac{\partial W'}{\partial e'_{xz}}\right) - \cdots \end{cases}$$

In essa, W' è il potenziale elastico relativo alle (u', v', w'), e $e'_{xx} \ldots$ sono le corrispondenti componenti di deformazione. Integrando la (5) allo spazio S e usando della solita formola di trasformazione di un integra e di volume in integrale di superficie, si ottiene:

$$\int_\Sigma \left(u'\frac{\partial u}{\partial t} + \cdots - u\frac{\partial u'}{\partial t} - \cdots\right) d\Sigma =$$
$$= \int_\Sigma \left[u'\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial e_{yx}}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial e_{zy}}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \cdots\right.$$
$$\left. - u\left(\frac{\partial W'}{\partial e'_{xx}}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial W'}{\partial e'_{yx}}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial W'}{\partial e'_{zx}}\frac{\partial z}{\partial n}\right) - \cdots\right] d\Sigma,$$

[1] *Sulla propagazione delle onde dei mezzi isotropi*, Acc. sc. Torino, vol. XLI, an. 1905.

dove la n è la normale interna a Σ. Si ponga:

$$U = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{yx}}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\frac{\partial z}{\partial n}$$

$$V = \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{zy}}\frac{\partial z}{\partial n}$$

$$W = \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{xz}}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\frac{\partial z}{\partial n},$$

e posizioni analoghe per le U', V', W'. L'ultima formola diverrà:

$$(6) \qquad \int (u'U + v'V + w'W - uU' - vV' - wW')\, d\Sigma = 0 .$$

4. Consideriamo le ipersuperficie Σ, Σ_a, Σ_b del n. 1, i coni caratteristici $\Sigma_a^{(1)}$, $\Sigma_b^{(1)}$ di equazioni

$$(t-\tau)^2 = \frac{r^2}{a^2} \qquad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

$$(t-\tau)^2 = \frac{r^2}{b^2}$$

e un cilindroide Σ_2 di raggio ϱ e coassiale con questi coni.

Sia n la normale interna a Σ_a (facente cioè, con l'asse t, angolo acuto); ν la normale a $\sigma_t^{(a)}$ nel punto corrispondente. Avremo:

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial \nu}\cos(n, \nu) = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{\partial x}{\partial \nu}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \nu} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} .$$

Sopra Σ_a avremo dunque:

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left\{ a\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{X_\nu}{\delta} \right\}, \ldots,$$

essendo X_ν, Y_ν, Z_ν la tensione attraverso l'elemento superficiale di $\sigma_t^{(a)}$ di normale ν e δ la densità. Analogamente, sopra Σ_b si ha:

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\left\{ b\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{X_\nu}{\delta} \right\},$$

e formole simili si hanno sopra $\Sigma_a^{(1)}$ e $\Sigma_b^{(1)}$. Sopra Σ e sopra Σ_1 si ha, invece,

$$\frac{\partial t}{\partial \nu} = \frac{\partial t}{\partial \varrho} = 0 .$$

Qnindi, sopra queste superficie, rispettivamente si ha:

$$U = -\frac{1}{\delta} X_\nu$$

$$U = -\frac{1}{\delta} X_\rho .$$

Supporremo che la propagazione all'esterno di σ avvenga per modo che sia

$$u = u_1 + u_2 \quad , \quad v = v_1 + v_2 \quad , \quad w = w_1 + w_2$$

nello spazio compreso tra Σ e Σ_b; e

$$u = u_1 \quad , \quad v = v_1 \quad , \quad w = w_1$$

nello spazio compreso tra Σ_b e Σ_a. Le (u_1, v_1, w_1) definiscono una vibrazione longitudinale; le (u_2, v_2, w_2) una vibrazione trasversale. Per la continuità dello spostamento, si ha:

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \quad \text{sopra } \Sigma_a$$

$$u_2 = v_2 = w_2 = 0 \quad \text{sopra } \Sigma_b ,$$

da cui consegue [1]:

$$a \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{X_\nu^{(1)}}{\delta} = 0 \quad \text{sopra } \Sigma_a$$

$$b \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{X_\nu^{(2)}}{\delta} = 0 \quad \text{sopra } \Sigma_b ,$$

e formole analoghe. Le $X_\nu^{(1)}, Y_\nu^{(1)}, Z_\nu^{(1)}$ sono le tensioni dovute allo spostamento (u_1, v_1, w_1); e le $X_\nu^{(2)}, Y_\nu^{(2)}, Z_\nu^{(2)}$ quelle dovute allo spostamento (u_2, v_2, w_2).

L'applicazione della (6) ad una vibrazione generica regolare e ad una vibrazione dovuta ad un centro di forza, condurrà alle richieste formole di rappresentazione, come mostreremo in una prossima Nota.

[1] Cfr. la mia Memoria citata, cap. I; e Love, *Wave-motions with discontinuities on the front*, Proc. Lond. Math. Soc., 1904.