ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Proprietà metriche intrinseche caratteristiche delle curve di un complesso lineare e delle superficie rigate di una congruenza lineare.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Le curve sghembe di (ossia le cui tangenti appartengono a) un complesso lineare di rette, si presentano in molte quistioni e sono state oggetto di ricerche da parte di Lie, Appell, Koenigs, Picard ecc. È quindi utile di possedere un criterio per riconoscere se una curva sghemba *data* appartiene, oppur no, ad un complesso lineare.

F. Egan (1) ha dimostrato che fra la curvatura σ e la torsione τ di una di tali curve passa una relazione, che involge anche le derivate τ' e τ'' di τ rispetto all'arco s. Noi invertiremo tale risultato; anzi, adoperando i metodi della *geometria intrinseca*, ritroveremo rapidamente la relazione di Egan, dimostreremo che essa caratterizza le curve di un complesso lineare e, data una di tali curve, daremo il modo di costruire il complesso a cui appartiene. Poi, accoppiando questo risultato con un altro del Picard, perverremo ad un criterio per riconoscere se una data superficie rigata (2) appartiene, oppur no, ad una congruenza lineare.

2. Affinchè una curva sghemba C appartenga ad un complesso lineare, è necessario e sufficiente che esistano una costante p ed una retta r (3), tali che ogni tangente t di C soddisfi alla relazione:

$$\operatorname{dist}(r\,,t)\operatorname{tang}(r\,,t)=p\,. \tag{1}$$

Siano $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\xi\,,\eta\,,\zeta$ le coordinate di r rispetto al triedro (mobile) formato dalla tangente t, dalla binormale e dalla normale principale di C nel punto estremo dell'arco s. Esse saranno funzioni di s legate dalle relazioni

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\,, \tag{2}$$ $$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=0\,; \tag{3}$$

(1) *The linear complex and a certain class of twisted curves*, Proceedings of the Royal Irish Academy, section A, Dublin, vol. XXIX, 1911, pag. 29.

(2) Non sviluppabile; poichè in una congruenza lineare, che non degeneri nel sistema delle rette di un piano, non esistono superficie sviluppabili.

(3) p è il *parametro*, ed r è l'asse del complesso lineare. Non può essere $p=0$ (ossia il complesso non può essere *speciale*), altrimenti le tangenti di C si appoggerebbero ad r, e la C sarebbe piana.

e poichè r deve restare immobile al variare di s, esse dovranno anche soddisfare alle seguenti *condizioni di immobilità* [1]:

$$(4) \qquad \alpha' - \sigma\gamma = 0 \quad , \quad \beta' - \tau\gamma = 0 \quad , \quad \gamma' + \sigma\alpha + \tau\beta = 0\,,$$

$$(5) \qquad \xi' - \sigma\zeta = 0 \quad , \quad \eta' - \tau\zeta = 0 \quad , \quad \zeta' + \sigma\xi + \tau\eta + \beta = 0\,,$$

ove gli accenti indicano derivate rispetto ad s. Essendo poi $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = \gamma_0 = \xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ le coordinate di t, si ha [2]

$$\text{momento}\,(r\,,t) = \text{dist}\,(r\,,t)\,\text{sen}\,(r\,,t) = -\Sigma(\alpha\xi_0 + \alpha_0\,\xi) = -\xi\,,$$

e, inoltre, $\cos(r\,,t) = \alpha$; quindi la (1) diventa

$$(6) \qquad \xi = -p\alpha.$$

Risolvere la questione proposta, equivale a cercare le condizioni di compatibilità delle equazioni (2), (3), (4), (5) e (6) nelle $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\xi\,,\eta\,,\zeta$.

Ora, derivando la (6), si ha, per le (4) e (5),

$$(7) \qquad \zeta = -p\gamma\,;$$

derivando ancora, si ha, per le (4), (5) e (6),

$$(8) \qquad \eta = -p\left(p + \frac{1}{\tau}\right)\beta\,;$$

sostituendo (6), (7) e (8) in (3), si ha

$$(9) \qquad \beta = \sqrt{-p\tau}\,;$$

poi dalle ultime due equazioni (4) si ha successivamente

$$(10) \qquad \gamma = \frac{\tau'}{2\tau^2}\sqrt{-p\tau} \quad , \quad \alpha = \frac{2\tau\tau'' - 3\tau'^2 + 4\tau^4}{4\tau^3}\sqrt{-p\tau}\,.$$

Infine, sostituendo nella (2) i valori (9) e (10) di $\alpha\,,\beta\,,\gamma$, si ha:

$$(11) \qquad \frac{(2\tau\tau'' - 3\tau'^2 + 4\tau^4)^2}{16\tau^5\sigma^2} + \tau + \frac{\tau'^2}{4\tau^3} = -\frac{1}{p}\,.$$

Viceversa; se la (11) è soddisfatta, le funzioni $\alpha\,\beta\,\gamma\,\xi\,\eta\,\zeta$ di s, definite dalle (6), ..., (10), soddisfanno al sistema (2), ..., (5). Ciò risulta dal procedimento da noi seguito.

Dunque: *affinchè una curva sghemba* C, *definita dalle equazioni intrinseche* $\sigma = \sigma(\tau)$, $\tau = \tau(s)$, *appartenga ad un complesso lineare, è necessario e sufficiente che la funzione primo membro di* (11) *sia una co-*

[1] Cfr. E. Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca*, cap. IX, § 3, Napoli, 1895.
[2] Ibid., cap. IX, § 7.

stante $-\frac{1}{p}$; *il corrispondente complesso ha per parametro* p *e per asse la retta* $r(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta)$ *definita dalle* (6), ..., (10).

Affinchè il complesso sia reale, occorre e basta, per le (9) e (10), che τ abbia un segno costante, opposto a quello di p. Ne segue che: *le curve sghembe reali di un complesso lineare reale sono tutte o sempre destrorse o sempre sinistrorse.*

Notiamo, per finire, che il primo termine della (11) non può essere identicamente nullo, altrimenti, per la seconda delle (10), sarebbe $\alpha = 0$, ossia le tangenti di C sarebbero tutte ortogonali alla retta r, sicchè la C sarebbe piana, contro il supposto.

3. Ora consideriamo una superficie rigata R, non sviluppabile, sulla quale assumiamo come linee coordinate v le asintotiche rettilinee (generatrici); e siano

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2, \tag{12}$$

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''dv^2, \tag{13}$$

le forme differenziali quadratiche che la definiscono. Le linee v sono asintotiche, quindi è $\mathrm{D} = 0$; e sono rette (geodetiche), quindi è $\left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0$ (¹). La (13) si riduce a

$$2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2, \tag{14}$$

sicchè l'equazione differenziale delle asintotiche C del secondo sistema è

$$2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv = 0. \tag{15}$$

Per un'asintotica C la curvatura σ e la torsione τ coincidono rispettivamente con la curvatura geodetica e con la torsione geodetica, e però valgono (²)

$$\sigma = \frac{1}{\delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{FD}'' - 2\mathrm{GD}'}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2\mathrm{FD}' - \mathrm{ED}''}{\Delta}\right)\right], \quad \tau = \frac{\mathrm{D}'}{\delta}, \tag{16}$$

(¹) In generale $\left\{ {rs \atop t} \right\}$ $(r, s, t = 1, 2)$ indicano i simboli di Christoffel costruiti con i coefficienti della (12). Notiamo incidentalmente che: *le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la forma* (12), *definita e positiva, rappresenti il quadrato dell'elemento lineare di una superficie rigata su cui le* v *siano le asintotiche rettilinee, sono*

$$\left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{-\mathrm{K}} + 2\left\{ {12 \atop 2} \right\} = 0,$$

ove K *è la curvatura della forma.* La seconda condizione risulta subito da una delle due note formole di Codazzi, oppure da alcune formole che servono a risolvere una quistione più generale. Cfr. M. Picone, *Sulle superficie flessibili ed inestendibili in rigate*, pag. 29, Annali di mat., tomo XXII, 1914.

(²) Cfr. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 2ª ed., vol. I, §§ 85 e 92, formole (4*) e (18).

ove si è posto

$$\delta = \sqrt{EG - F^2} \quad , \quad \Delta = \sqrt{ED''^2 - 4FD'D'' + 4GD'^2}\,. \tag{17}$$

Le asintotiche C sono anch'esse rette, solo quando è nullo il secondo membro della espressione (16) di σ; *ed allora* R *è una quadrica*. Escludendo questo caso, sarà $\sigma \neq 0$; e sarà pure $\tau \neq 0$, altrimenti le C sarebbero curve piane, e la R sarebbe sviluppabile (inviluppo dei piani delle C), contro l'ipotesi. È dunque lecito di imporre alle asintotiche C di soddisfare la (11), il che equivale ad imporre alla R di appartenere ad una congruenza lineare ([1]).

Ora, lungo un'asintotica C si ha, per la (15),

$$du = -\frac{D''}{2D'}\,dv \quad , \quad ds = \frac{\Delta}{2D'}\,dv \,,$$

quindi

$$\frac{d}{ds} = \frac{du}{ds}\cdot\frac{\partial}{\partial u} + \frac{dv}{ds}\cdot\frac{\partial}{\partial v} = \Omega \quad , \quad \frac{d^2}{ds^2} = \Omega(\Omega) = \Omega^2 \,,$$

ove Ω è l'operatore lineare

$$\Omega \equiv \frac{1}{\Delta}\left(2D'\frac{\partial}{\partial v} - D''\frac{\partial}{\partial u}\right); \tag{18}$$

dunque le derivate τ', τ'' della torsione τ di C rispetto al suo arco s valgono, per la seconda delle (16),

$$\tau' = \Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right) \quad , \quad \tau'' = \Omega^2\left(\frac{D'}{\delta}\right). \tag{19}$$

Per le (16) e (19), il primo membro della (11) si muta nella seguente funzione φ di u, v:

$$\varphi = \frac{\left\{2\Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right)\Omega^2\left(\frac{D'}{\delta}\right) - 3\left[\Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right)\right]^2 + 4\,\frac{D'^4}{\delta^4}\right\}^2}{16\,\frac{D'^5}{\delta^7}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{FD'' - 2GD'}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2FD' - ED''}{\Delta}\right)\right\}^2} + \frac{D'}{\delta} + \frac{\delta^3}{4D'^3}\left[\Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right)\right]^2. \tag{20}$$

Pel teorema del § 2, essa deve ridursi ad una costante lungo ogni asintotica C: quindi dev'essere $\Omega(\varphi) = 0$. Dunque: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie rigata* R (*non sviluppabile, nè quadrica*),

([1]) Poichè le superficie rigate di una congruenza lineare hanno la proprietà caratteristica, che ogni loro asintotica appartiene ad un complesso lineare. Cfr. Picard, *Traité d'analyse*, tom. I, cap. XII, § 29.

definita dalle (12) *e* (14), *appartenga ad una congruenza lineare, è che sia* $\Omega(\varphi) = 0$.

4. Quando sulla R sono note le asintotiche C, e queste si assumono come linee coordinate u, alla condizione precedente si può dare una forma semplice ed elegante, trovata, per altra via, da M. Picone [1]: *il simbolo* $\left\{ {22 \atop 1} \right\}$ *dev'essere il prodotto di una funzione della sola* u, *per una funzione della sola* v, *ossia*

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \left\{ {22 \atop 1} \right\} = 0 . \tag{21}$$

Accenniamo rapidamente a questa riduzione.

Essendo le u asintotiche, si ha $D'' = 0$: quindi

$$\varDelta = 2D' \sqrt{G} \quad , \quad \Omega \equiv \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} ;$$

poi, per le formole di Codazzi [2],

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\delta}\right) = -2 \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{D'}{\delta} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\delta}\right) = -2 \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{D'}{\delta} ; \tag{22}$$

quindi [3]

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial E}{\partial u} = 2\left\{ {11 \atop 1} \right\} E + 2\left\{ {11 \atop 2} \right\} F \;.\; \frac{\partial F}{\partial u} = \left\{ {12 \atop 1} \right\} E + \left(\left\{ {11 \atop 1} \right\} + \left\{ {12 \atop 2} \right\}\right) F + \left\{ {11 \atop 2} \right\} G \;, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial G}{\partial u} = 2\left\{ {12 \atop 1} \right\} F + 2\left\{ {12 \atop 2} \right\} G \;, \\ &\frac{\partial E}{\partial v} = 2\left\{ {12 \atop 1} \right\} E + 2\left\{ {12 \atop 2} \right\} F \;,\; \frac{\partial F}{\partial v} = \left\{ {22 \atop 1} \right\} E + \left(\left\{ {12 \atop 1} \right\} + \left\{ {22 \atop 2} \right\}\right) F + \left\{ {12 \atop 2} \right\} G \;, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial G}{\partial v} = 2\left\{ {22 \atop 1} \right\} F + 2\left\{ {22 \atop 2} \right\} G \;. \end{aligned} \right.$$

$$\Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right) = -\frac{2D'}{\delta\sqrt{G}} \left\{ {12 \atop 1} \right\} ,$$

$$\Omega^2\left(\frac{D'}{\delta}\right) = -\frac{2D'}{\delta G}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left\{ {12 \atop 1} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 1} \right\}^2 - \frac{F}{G}\left\{ {12 \atop 1} \right\}\left\{ {22 \atop 1} \right\} - \left\{ {12 \atop 1} \right\}\left\{ {22 \atop 2} \right\}\right] ,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{FD'' - 2GD'}{\varDelta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2FD' - ED''}{\varDelta}\right) =$$

$$= -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{F}{\sqrt{G}} = \frac{\delta^2}{G\sqrt{G}} \left\{ {22 \atop 1} \right\} .$$

(1) *Sulle congruenze rettilinee* W, Rend. del Circ. mat. di Palermo, tomo XXXVII, nn. 15 e seg.; ed altra Memoria in corso di stampa (ivi).

(2) Cfr. Bianchi, loc. cit., pag. 120, formole (IV*).

(3) Si ricordino le formole (cfr. Bianchi, loc. cit., § 31).

Sostituendo questi valori nella (20) e ricordando la formola [1]

$$(23)\qquad -G\frac{D'^2}{\delta^2}=\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+$$
$$+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}^2,$$

si ha

$$\varphi=\frac{GN^2}{\delta D'}+\frac{D'}{\delta}+\frac{\delta}{GD'}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}^2,$$

ove si è posto per semplicità

$$(24)\qquad N=\frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\frac{F}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\ [2].$$

Ora dobbiamo esprimere che $\Omega(\varphi)=0$, ossia che $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=0$; con ciò otteniamo

$$\frac{N^2}{\delta^2}\left(\frac{\partial G}{\partial v}-G\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{D'}{\delta}-4G\frac{\partial\log\delta}{\partial v}\right)+\frac{2GN}{\delta^2}\frac{\partial N}{\partial v}+\frac{D'^2}{\delta^2}\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{D'}{\delta}-$$
$$-\frac{1}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}^2\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{D'}{\delta}-\frac{1}{G^2}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}^2\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{2}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=0;$$

poi, sostituendo a $\dfrac{\partial G}{\partial v}$ il suo valore (a), a $\dfrac{\partial}{\partial v}\log\dfrac{D'}{\delta}$ il suo valore tratto dalla (22), a $\dfrac{D'^2}{\delta^2}$ il suo valore (23), ed a $\dfrac{\partial\log\delta}{\partial v}$ il suo valore $\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+$ $+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$ [3], otteniamo

$$\frac{FN^2}{\delta^2}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{GN}{\delta^2}\frac{\partial N}{\partial v}+\frac{N}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0;$$

oppure, essendo $N\neq 0$,

$$\frac{FN}{\delta^2}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{G}{\delta^2}\frac{\partial N}{\partial v}+\frac{1}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0;$$

(1) Cfr. Bianchi, loc. cit., § 37. Si noti che $-D'^2:\delta^2$ è la curvatura K della nostra rigata.

(2) Si noti che N non può esser nulla identicamente, altrimenti sarebbe nullo il primo termine del primo membro della (11) su ogni asintotica C, le quali perciò sarebbero curve piane (cfr. la fine del § 2).

(3) Cfr. Bianchi, loc. cit., § 56.

poi, sostituendo a $\frac{\partial N}{\partial v}$ il valore tratto dalla (24),

$$\frac{G}{\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{G}{\delta^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\frac{F}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]+$$

$$+\frac{FN}{\delta^2}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0.$$

Infine, eliminando $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{G}\right)$ mediante le (a), sostituendo ad N il suo valore (24), ed osservando che $\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$ [1], si riconosce che il primo membro dell'ultima uguaglianza stessa si riduce al suo primo termine, e che quindi l'uguaglianza stessa si riduce alla (21) del Picone.

NOTA. Le quistioni qui trattate, con rappresentazioni e metodi di geometria differenziale *metrica*, lo erano già state con quelli della geometria differenziale *proiettiva* (Cfr. E. J. Wilczynsky, *Proiettive differential geometry*, pag. 167, Leipzig, 1906).

Fisica matematica. — *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore cilindrico.* Nota di A. SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In una Memoria che conto di pubblicare tra breve, ho studiato varie questioni relative alla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore metallico toroidale.

La trattazione delle stesse questioni nel caso di un conduttore cilindrico indefinito a sezione circolare, già da tempo è stata svolta in modo notevolmente semplice, stante la possibilità di prendere in esame delle propagazioni tipiche di onde elettromagnetiche, aventi, contemporaneamente, le tre proprietà di essere *sinusoidali*, *simmetriche* e *ciclomagnetiche*: tali cioè che — (z, ϱ, ψ) essendo un sistema di coordinate cilindriche coll'asse coincidente coll'asse del conduttore — per esse:

1° la dipendenza del campo elettromagnetico da t e z è caratterizzata da un fattore complesso della forma $e^{i(\nu t+qz)}$ (ν e q costanti reali);

2° il campo elettromagnetico risulta indipendente da ψ;

3° le linee di forza magnetica sono circoli situati in piani normali all'asse del conduttore e aventi il centro su tale asse (e le linee di forza elettrica sono tutte contenute in piani meridiani del conduttore).

[1] È la condizione di integrabilità del sistema (20).