ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

poi, sostituendo a $\frac{\partial N}{\partial v}$ il valore tratto dalla (24),

$$\frac{G}{\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{G}{\delta^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\frac{F}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]+$$

$$+\frac{FN}{\delta^2}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0.$$

Infine, eliminando $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{G}\right)$ mediante le (a), sostituendo ad N il suo valore (24), ed osservando che $\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$ [1], si riconosce che il primo membro dell'ultima uguaglianza stessa si riduce al suo primo termine, e che quindi l'uguaglianza stessa si riduce alla (21) del Picone.

Nota. Le quistioni qui trattate, con rappresentazioni e metodi di geometria differenziale *metrica*, lo erano già state con quelli della geometria differenziale *proiettiva* (Cfr. E. J. Wilczynsky, *Proiettive differential geometry*, pag. 167, Leipzig, 1906).

Fisica matematica. — *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore cilindrico.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. In una Memoria che conto di pubblicare tra breve, ho studiato varie questioni relative alla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore metallico toroidale.

La trattazione delle stesse questioni nel caso di un conduttore cilindrico indefinito a sezione circolare, già da tempo è stata svolta in modo notevolmente semplice, stante la possibilità di prendere in esame delle propagazioni tipiche di onde elettromagnetiche, aventi, contemporaneamente, le tre proprietà di essere *sinusoidali*, *simmetriche* e *ciclomagnetiche*: tali cioè che — (z, ϱ, ψ) essendo un sistema di coordinate cilindriche coll'asse coincidente coll'asse del conduttore — per esse:

1° la dipendenza del campo elettromagnetico da t e z è caratterizzata da un fattore complesso della forma $e^{i(\nu t+qz)}$ (ν e q costanti reali);

2° il campo elettromagnetico risulta indipendente da ψ;

3° le linee di forza magnetica sono circoli situati in piani normali all'asse del conduttore e aventi il centro su tale asse (e le linee di forza elettrica sono tutte contenute in piani meridiani del conduttore).

[1] È la condizione di integrabilità del sistema (20).

Iniziando le mie ricerche mi proposi, naturalmente, di procedere per analogia col caso già trattato, prendendo in esame le propagazioni di onde che in un conduttore toroidale fanno riscontro alle propagazioni tipiche del caso cilindrico, e ad esse si riducono al crescere indefinito del raggio della circonferenza direttrice del toro.

Ma a ciò si opponeva, almeno a prima vista, una difficoltà, per il fatto che, potendosi escludere anche solo in base a un esame superficiale delle equazioni fondamentali del campo elettromagnetico che tali propagazioni fossero simmetriche rispetto alla direttrice del toro, risultava fallace il criterio che prima di ogni altro si affacciava alla mente per individuarle. Onde si presentava la questione di dare alle propagazioni tipiche del caso cilindrico una caratterizzazione che si prestasse meglio della primitiva loro definizione a determinare le propagazioni corrispondenti del caso toroidale.

Una caratterizzazione energetica avrebbe certamente fatto al caso mio: le semplici considerazioni che seguono mostrano che non è difficile pervenirvi effettivamente, permettendo di stabilire che le propagazioni in questione sono caratterizzate, dentro la totalità delle propagazioni sinusoidali di eguali periodi rispetto a t e z, dal fatto che per esse, in corrispondenza a un determinato valore dell'intensità efficace della corrente, ad ogni istante risulta minimo il calore di Joule (ed anche il valore dell'energia magnetica) relativo a un qualunque tratto del conduttore limitato da due piani perpendicolari al suo asse.

Questo è il risultato principale contenuto nella mia Nota: soltanto, l'ultimo paragrafo del lavoro è dedicato a stabilire, con considerazioni che non escono dall'ambito naturale del lavoro, alcune proprietà integrali delle fuuzioni di Bessel, che non mi consta siano state finora rilevate e che mi sono riuscite utili nelle ricerche, cui ho già accennato, relative ai conduttori toroidali.

2. Consideriamo un campo elettromagnetico avente per sede un cilindro metallico indefinito, la cui sezione sia un cerchio di raggio r.

Colle notazioni consuete, dentro il conduttore, potendosi ivi trascurare la corrente di spostamento di fronte alla corrente di conduzione, in base alle equazioni fondamentali di Heaviside-Hertz, avremo

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{H} \\ &-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{E}. \end{aligned}\right.$$

In conseguenza, assunto come sistema di riferimento il solito sistema di coordinate cilindriche (z, ϱ, ψ), per $\varrho \leq r$ risulterà [1]:

[1] Per le espressioni effettive delle componenti del rotore in un generico sistema di coordinate ortogonali cfr. ad es.: *Max Abraham. Enc. der Math. Wiss.* IV, 14, n. 20.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,E_z = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\,H_\psi) - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial H_\varrho}{\partial\psi} \\[2ex] \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,E_\varrho = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial H_z}{\partial\psi} - \dfrac{\partial H_\psi}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,E_\psi = \dfrac{\partial H_\varrho}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial\varrho} \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_z}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\,E_\psi) - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial E_\varrho}{\partial\psi} \\[2ex] -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_\varrho}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial E_z}{\partial\psi} - \dfrac{\partial E_\psi}{\partial z} \\[2ex] -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_\psi}{\partial t} = \dfrac{\partial E_\varrho}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial\varrho}\,. \end{cases}$$

3. Corrispondentemente alle singole terne di valori possibili per z, ϱ, t consideriamo i valori medi rispetto a ψ delle componenti di **E** ed **H**:

$$E_z^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E_z\,d\psi \text{ ecc.} \quad ; \quad H_z^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_z\,d\psi \text{ ecc.}$$

Dalle (1), (2) segue

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,E_z^{(m)} = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\,H_\psi^{(m)}) \\[2ex] \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,E_\varrho^{(m)} = -\dfrac{\partial H_\psi^{(m)}}{\partial z} \\[2ex] -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_\psi^{(m)}}{\partial t} = \dfrac{\partial E_\varrho^{(m)}}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z^{(m)}}{\partial\varrho}\,. \end{cases}$$

Le (3) risultano suddisfatte allora [1] e allora soltanto che $E_z^{(m)}, E_\varrho^{(m)}, H_\psi^{(m)}$ siano dedotte da una soluzione $\Pi(z, \varrho, t)$ dell'equazione a derivate parziali

$$(4)\quad \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\Pi}{\partial t} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right)$$

mediante le posizioni

$$(5)\quad E_z^{(m)} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right), \quad E_\varrho^{(m)} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varrho\,\partial z}, \quad H_\psi^{(m)} = -\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\,.$$

[1] V. Sommerfeld, *Ueber die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes*. Ann. d. Phys. *67* (1893), pag. 233.

Nel seguito diremo *dedotto* da una soluzione Π reale o complessa della (4) ognuno degli (infiniti) campi elettromagnetici, pei quali i valori di $E_z^{(m)}$, $E_\rho^{(m)}$, $H_\psi^{(m)}$ sono legati a Π dalle relazioni (5): convenendo, naturalmente, di considerare come identici due di tali campi, appena coincidono per essi le parti reali delle singole componenti di **E** e di **H**.

È subito visto che si ha sempre un campo elettromagnetico dedotto da Π assumendo

$$E_z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right), \quad E_\rho = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varrho\,\partial z}, \quad H_\psi = -\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho},$$
$$E_\psi = H_z = H_\rho = 0.$$

Tale campo elettromagnetico è evidentemente l'unico campo elettromagnetico simmetrico e ciclomagnetico dedotto da Π.

4. Sia C la totalità dei campi elettromagnetici dedotti da una medesima soluzione Π della (4). Ci proponiamo di dimostrare che in C il campo simmetrico e ciclomagnetico è caratterizzato dal fatto che ad ogni istante esso minimizza il calore di Joule corrispondente a un qualunque tratto del conduttore compreso tra due piani perpendicolari al suo asse. Per far ciò, osserviamo che per qualunque campo dedotto da Π dovrà essere

$$E_z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right) + E_z^{(\psi)}, \quad E_\rho = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varrho\,\partial z} + E_\rho^{(\psi)}, \quad E_\psi = E_\psi^{(\psi)},$$

$E_z^{(\psi)}$, $E_\rho^{(\psi)}$, $E_\psi^{(\psi)}$ essendo tali che per qualunque terna di valori di z, ϱ, t si abbia

$$\int_0^{2\pi} E_z^{(\psi)}\,d\psi = \int_0^{2\pi} E_\rho^{(\psi)}\,d\psi = \int_0^{2\pi} E_\psi^{(\psi)}\,d\psi = 0.$$

Se dunque diciamo Q il calore di Joule relativo al tratto del conduttore compreso tra i due piani $z = z_1$, $z = z_2$, avremo

$$Q = \sigma\int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^r \varrho\,d\varrho \int_0^{2\pi} d\psi\,\{R^2e(E_z) + R^2e(E_\rho) + R^2e(E_\psi)\} =$$
$$= \sigma\int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^r \varrho\,d\varrho\left\{\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}R^2e(\Pi)\right)\right]^2 + \left[\frac{\partial^2 R^2e(\Pi)}{\partial\varrho\,\partial z}\right]^2\right\} +$$
$$+ \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^r \varrho\,d\varrho\,\{R^2e(E_z^{(\psi)}) + R^2e(E_\rho^{(\psi)}) + R^2e(E_\psi^{(\psi)})\}$$

ciò che evidentemente è sufficiente a provare l'asserto.

5. In modo del tutto analogo si potrebbe provare che in C il campo elettromagnetico simmetrico ciclomagnetico è caratterizzato anche dal fatto che ad ogni istante esso minimizza l'energia magnetica, sempre nel senso precisato al § 4.

6. Sia Π periodica rispetto a z, con periodo $\frac{2\pi}{q}$, e rispetto a t, con periodo $\frac{2\pi}{\nu}$: con che, nel nostro conduttore si avrà una propagazione di onde elettromagnetiche.

In tale ipotesi l'intensità totale della corrente attraverso una sezione normale del conduttore:

$$J = \sigma \int_0^r \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} E_z \, d\psi = -2\pi\sigma r \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r}$$

ammetterà anch'essa il periodo $\frac{2\pi}{q}$ rispetto a z, e il periodo $\frac{2\pi}{\nu}$ rispetto a t, e il valore medio del quadrato della sua parte reale

$$(6) \quad J^2_{eff} = \frac{\nu q}{4\pi^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \int_0^{\frac{2\pi}{q}} dz \, R^2_e(J) = \nu q \sigma^2 r^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \int_0^{\frac{2\pi}{q}} dz \, R^2 e \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r},$$

ci darà il quadrato dell'intensità efficace della corrente.

Sempre restando in tale ipotesi, consideriamo la totalità delle propagazioni di onde elettromagnetiche dedotte dalle infinite soluzioni della (4) che non differiscono da Π altro che per una costante moltiplicativa reale [1] h. Fissare il valore di h, equivarrà a fissare il valore dell'intensità efficace della corrente; onde, come corollario di quanto abbiamo stabilito al paragrafo precedente, si può asserire che nella totalità di propagazioni di onde considerata, la propagazione che in corrispondenza a un determinato valore dell'intensità efficace minimizza, nel senso già precisato, il calore di Joule (l'energia magnetica), sarà sempre simmetrica e cilomagnetica.

7. Tra tutte le propagazioni di periodi $\frac{2\pi}{q}$, $\frac{2\pi}{\nu}$, si ottengono le propagazioni sinusoidali, quando a caratterizzare la dipendenza di Π da z e da t si assuma il fattore complesso $e^{i(qz+\nu t)}$. Precisamente se poniamo

$$\Pi = e^{i(qz+\nu t)} u(\varrho),$$

e

$$K^2 = -\left(4\pi \frac{i\mu\nu\sigma}{c^2} + q^2\right).$$

[1] Più in generale, complessa ma di argomento assegnato.

si soddisfa alla (4) allora, e allora soltanto, che si faccia coincidere $u(\varrho)$, a meno di un'arbitraria costante moltiplicativa (reale o complessa) colla J_0 di Bessel riferita all'argomento (complesso) $K\varrho$.

Essendo attualmente, per la (6) [1]:

$$J_{eff}^2 = \nu q \sigma^2 r^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \int_0^{\frac{2\pi}{q}} dz \, R^2 e \left\{ e^{i(\nu t + qz)} \left(\frac{du}{d\varrho} \right)_{\varrho = r} \right\} = 2\pi^2 \sigma^2 r^2 \left| \frac{du}{d\varrho} \right|_{\varrho = r}^2 ,$$

il valore dell'intensità efficace non dipenderà dall'argomento della costante moltiplicativa, ma solo dal suo modulo: e lo stesso, come è subito visto, accadrà per il valore del calore di Joule e dell'energia magnetica. Fissando il valore dell'intensità efficace della corrente, individueremo dunque una semplice infinità di soluzioni della (4) per le quali le propagazioni simmetriche e longitudinali corrispondenti avranno in comune (cfr. § 5) in ogni tratto del conduttore i valori dei calore di Joule e dell'energia magnetica. Con ciò (sempre in base alle conclusioni del § 5) resta evidentemente acquisita la preannunziata caratterizzazione energetica della propagazioni di onde possibili nel nostro conduttore, che al tempo stesso risultano sinusoidali, simmetriche, e ciclomagnetiche.

8. *Dimostrazione di due identità relative alle funzioni cilindriche.* Poniamo

$$k^2 = -4\pi \frac{i\mu\nu\sigma}{c^2} \quad , \quad x = k\varrho :$$

dalle (1), (2) segue che qualunque sia (il numero intero e positivo) n, si ottiene una propagazione sinusoidale di onde elettromagnetiche (indipendente da z) possibile nel nostro conduttore, assumendo:

$$E_z = e^{i(n\psi + \nu t)} J_n(x) \ , \ H_\varrho = -\frac{nc}{\mu\nu} \frac{1}{\varrho} e^{i(n\psi + \nu t)} J_n(x) \ , \ H_\psi = \frac{ck}{i\mu\nu} e^{i(n\psi + \nu t)} J'_n(x)$$

$$E_\varrho = E_\psi = H_z = 0 .$$

Riferendoci a tale propagazione di onde, a un istante generico indichiamo rispettivamente con Q e T il valore (indipendente da z) del calore di Joule e dell'energia magnetica per unità di lunghezza del conduttore. Detti Q_m e T_m i valori medî di Q e T rispetto a t, avremo, in base alla definizione stessa di Q e T [2]:

[1] Si tenga presente che il valor medio rispetto a t del quadrato della parte reale di un'espressione complessa della forma $e^{i(\nu t + qz)}(a + ib)$ è dato da $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

[2] Cfr. la Nota precedente.

$$Q_m = \sigma \int_0^r \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} d\psi \left\{ \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} R^2 e(E_z)\, dt \right\} = \pi\sigma \int_0^r \varrho\, d\varrho\, |J_n(x)|^2$$

$$T_m = \frac{\mu}{8\pi} \int_0^r \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} d\psi \left\{ \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} R^2 e(H_z)\, dt + \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} R_e^2(H_\psi)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{c^2}{8\mu\nu^2} \int_0^r \varrho\, d\varrho \left\{ \frac{n^2}{\varrho^2} |J_n(x)|^2 + |k|^2 |J'_n(x)|^2 \right\}.$$

D'altra parte detto **U** il vettore complesso di Poynting — prodotto vettore di **E** per $\overline{H}$ [1] moltiplicato per $\frac{c}{8\pi}$ — e Φ il valore (indipendente da t) del flusso (entrante) di **U** attraverso la superficie S che limita il pezzo di conduttore considerato, deve pure essere:

$$Q_m = Re(\Phi) \quad , \quad T_m = \frac{1}{2\nu} Re\left(\frac{\Phi}{i}\right).$$

Ora su S la componente di **U** secondo la normale interna è diversa da zero soltanto in quella sua parte che appartiene anche alla superficie del conduttore ed ivi assume il valore

$$\frac{c}{8\pi} E_z \overline{H}_\psi = \frac{\sigma \overline{k}}{2k^2} J_n(x)\, J'_n(\overline{x}).$$

Si perviene così alla conclusione che deve essere:

$$(6) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^r \varrho\, d\varrho\, |J_n(k\varrho)|^2 = Re\left(\frac{k\overline{b}}{k^2} J_n(kb)\, J'_n(\overline{k}b)\right) \\ \displaystyle\int_0^r \varrho\, d\varrho \left\{ \frac{n^2}{\varrho^2} |J_n(k\varrho)|^2 + |k|^2 |J'_u(k\varrho)|^2 \right\} = Re(\overline{k}b\, J_n(kb)\, J'_n(\overline{k}b)). \end{cases}$$

Le (6) hanno validità, per qualunque valore di n, tutte le volte che k^2 sia un immaginario puro.

[1] Rappresento, secondo il solito, con $\overline{\mathbf{H}}$ il vettore complesso coniugato di **H**.