# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

# RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.




ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

le analogie di comportamento di questo acido con i due altri precedentemente descritti.

A proposito della decomposizione che questi acidi subiscono per azione del calore, crediamo opportuno di richiamare l'attenzione sopra un errore in cui è caduto il referente del « Chemisches Zentralblatt » (1) nel fare il riassunto del lavoro *Sopra la nuova decomposizione delle ossime* da noi pubblicato nello scorso anno (2).

Noi abbiamo stabilito che l'ossima benzofenone, ed altre analogamente costituite, quando vengano riscaldate, si decompongono nettamente in benzofenone, azoto ed ammoniaca secondo l'eguaglianza:

$$3\,(C_6H_5)_2.C{=}NOH \quad = 3\,(C_6H_5)_2.CO + N_2 + NH_3$$

senza che avvenga la minima formazione di benzanilide, in seguito a trasposizione di Beckmann. Invece, il referente del Zentralblatt traduce che « una parte dell'ossima subisce la trasposizione di Beckmann, e perciò si sottrae alla decomposizione », vale a dire ci attribuisce una asserzione che rappresenta precisamente il contrario di quanto noi abbiamo trovato e pubblicato. D'altra parte, le nostre esperienze sono state recentemente confermate anche da A. Kötz ed O. Wunstorf nel loro lavoro sull'azione del calore sopra le chetossime (3).

**Matematica.** — *Problema del parallelepipedo rettangolo nel caso dell'elasticità ereditaria.* Nota I della dott.ssa Angela Maria Molinari, presentata dal Corrispondente A. Di Legge (4).

In una Nota pubblicata nel Giornale di matematiche di Battaglini (5), ho dato le formule risolutive dei problemi fondamentali tipici relativi alle deformazioni del parallelepipedo rettangolo.

Mi propongo di esporre come le formule da me trovate possano combinarsi con quelle dell'ing. Giorgi (6), relative alla teoria dell'elasticità ereditaria, per ricavarne le soluzioni del problema del parallelepipedo anche nel caso in cui il materiale abbia elasticità ereditaria. Tale eredità suppongo

(1) Chemisches Zentralblatt *84* (1913). II, pag. 962.

(2) Questi Rendiconti, vol. XXII (1913), 1° sem., pag. 735.

(3) Journal für prak. Chemie (II) *88* (1913), 519.

(4) Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1914.

(5) Molinari, *Problemi di equilibrio elastico relativi al parallelepipedo rettangolo ed alla piastra isotropa* (Giorn. di mat. di Battaglini, vol. 51, 1913, pp. 315-334).

(6) G. Giorgi, *Sui problemi dell'elasticità ereditaria* (Rend. R. Accad. Lincei, 1912, pp. 412-418); id., *Sugli operatori funzionali ereditarii* (ibid., 1912, pp. 683-687). Nel seguito del lavoro indicherò queste Note con A e B.

sia del tipo *normale*, cioè esprimibile con formule indipendenti dalla scelta dell'origine dei tempi; è questo il caso interessante per le applicazioni, e implica solo l'ipotesi che il materiale sia di natura invariabile col tempo (1).

Indichiamo con S il campo limitato dal parallelepipedo, e con $\sigma$ l'insieme delle facce; siano poi $\sigma_1$ , $\sigma_1'$ ; $\sigma_2$ , $\sigma_2'$ ; $\sigma_3$ , $\sigma_3'$ rispettivamente le coppie di faccie normali ad $O_x$ , $O_y$ , $O_z$ , assi coordinati aventi l'origine nel centro del parallelepipedo.

Supponiamo conosciute al contorno, e date come funzioni del tempo, le componenti tangenziali degli spostamenti $(u , v , w)$ e la componente normale della forza (T), cioè

$$\begin{cases} T_1(t) , v(t) , w(t) & \text{sulle facce } \sigma_1 , \sigma_1' , \\ u(t) , T_2(t) , w(t) & \text{sulle facce } \sigma_2 , \sigma_2' , \\ u(t) , v(t) , T_3(t) & \text{sulle facce } \sigma_3 , \sigma_3' . \end{cases}$$

Il problema di determinare il valore degli spostamenti in un punto qualsiasi $(x_1 , y_1 , z_1)$ del campo, si riduce (2) alla ricerca di

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} .$$

Essa è data, nel caso non ereditario, da

$$\Theta(x_1 , y_1 , z_1) = \frac{1}{4\pi(K + 2L)} V ,$$

dove V è un'espressione che contiene solamente i dati al contorno e le coordinate, mentre K ed L sono i coefficienti di elasticità.

In virtù di un teorema, dimostrato dall'ing. Giorgi (3), per passare dal caso non ereditario a quello ereditario (purchè si tratti di eredità normale), basta, in luogo di K ed L numerici, sostituire gli operatori simbolici

$$\begin{cases} \overline{K}(\Delta) = K - \int_0^\infty K_1(\vartheta)\, e^{-\vartheta\Delta}\, d\vartheta \\ \overline{L}(\Delta) = L - \int_0^\infty L_1(\vartheta)\, e^{-\vartheta\Delta}\, d\vartheta , \end{cases}$$

dove K , L , $L_1$ , $K_1$ , sono rispettivamente quantità e segni di funzioni note

(1) G. Giorgi, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di elettrodinamica* (Assoc. elettrotecnica italiana, Atti, vol. IX, 1905, fasc. 6°, art. 4); e più specialmente nella Nota citata A, art. 2, pag. 414.

(2) Cfr. mia Nota citata, pp. 315-319.

(3) Cfr. Nota A, pag. 417, n. 5.

dall'esperimento o peculiari del corpo, e dove $\Delta = \frac{\partial}{\partial t}$ è il simbolo operativo della derivazione.

Applicando questa regola si ha la soluzione espressa sotto la forma simbolica:

$$(1) \qquad \Theta(x_1, y_1, z_1, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\left[\mathrm{K} - \int_0^\infty \mathrm{K}_1(\vartheta)\, e^{-\vartheta\Delta}\, d\vartheta + 2\left(\mathrm{L} - \int_0^\infty \mathrm{L}_1(\vartheta)\, e^{-\vartheta\Delta}\, d\vartheta\right)\right]} \mathrm{V}(t),$$

in cui V viene a contenere il tempo, perchè i dati al contorno si suppongono funzioni arbitrarie di $t$.

Per interpretare questa formula, occorre studiare l'operatore rappresentato da

$$\mathrm{F}(\Delta) = \frac{1}{4\pi\left[\mathrm{K} - \int_0^\infty \mathrm{K}_1(\vartheta)\, e^{-\vartheta\Delta}\, d\vartheta + 2\left(\mathrm{L} - \int_0^\infty \mathrm{L}_1(\vartheta)\, e^{-\vartheta\Delta}\, d\vartheta\right)\right]}.$$

Poniamo:

$$\begin{cases} 4\pi\mathrm{K} + 8\pi\mathrm{L} = a \\ 4\pi\mathrm{K}_1(\vartheta) + 8\pi\mathrm{L}_1(\vartheta) = \psi(\vartheta) \\ \int_0^\infty \psi(\vartheta)\, e^{-\vartheta\Delta}\, d\vartheta = \Psi(\Delta); \end{cases}$$

allora l'operatore $\mathrm{F}(\Delta)$ prenderà la forma

$$\mathrm{F}(\Delta) = \frac{1}{a - \Psi(\Delta)},$$

dove $\Psi(\Delta)$, in virtù della formula scritta, è la trasformata di Laplace della $\psi(\vartheta)$; la $a$ è una costante, mentre $\psi(\vartheta)$ gode delle stesse proprietà della funzione descritta col medesimo simbolo dall'ing. Giorgi [1]: la $\Psi(\Delta)$, per conseguenza, ha le proprietà esposte per la omonima funzione nella citata Nota B.

Si tratta di riconoscere e discutere le proprietà dell'operatore simbolico espresso da $\mathrm{F}(\Delta)$. Queste proprietà, in virtù della teoria degli operatori, dipendono tutte dalla *forma* analitica che avrebbe la $\mathrm{F}(\Delta)$, qualora $\Delta$, anzichè un simbolo d'operazione $\left(\Delta = \frac{\partial}{\partial t}\right)$, rappresentasse una variabile complessa $\Delta = \xi + i\eta$.

Dalle dimostrazioni, di cui nella citata Nota B, sappiamo che $\Psi(\Delta)$ è una funzione analitica, regolare nel semipiano $\xi > 0$, e che tende a zero

[1] Cfr. Nota citata A, pag. 413, n. 3.

nelle direzioni $\pm i\infty$. Di qui risulta che l'operatore $F(\Delta)$, in queste direzioni, assume il valore asintotico $\frac{1}{a}$: cioè $F(\Delta)$ non è un *operatore diffusivo* (1). Conviene dunque scriverlo sotto la forma

$$F(\Delta) = \frac{1}{a} + \frac{\Psi(\Delta)}{a^2 - a\Psi(\Delta)},$$

di modo che, sostituendo nella (1), si ha il risultato espresso sotto la forma

$$\Theta(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{1}{a} V(t) + \frac{\Psi(A)}{a^2 - a\Psi(\Delta)} V(t). \tag{2}$$

Il primo termine $\frac{1}{a} V(t)$, che rappresenta l'effetto iniziale, è quello stesso che si presenta nel caso non ereditario e che trovasi discusso nella mia Nota sopra citata.

Resta da discutere il secondo termine; in esso, l'operatore $\frac{\Psi(\Delta)}{a^2 - a\Psi(\Delta)}$, riguardato sotto la fittizia forma di una funzione di variabile complessa, tenderebbe a zero nelle direzioni $\Delta = \pm i\infty$: quindi è operatore diffusivo. Di più, per evidenti e necessarie condizioni fisiche a cui ogni elasticità ereditaria deve soddisfare (l'effetto segua sempre e non preceda la causa), esso verifica in ogni caso la *condizione di successione* (2). La sua interpretazione esplicita può dunque darsi sotto la forma

$$\frac{\Psi(\Delta)}{a^2 - a\Psi(\Delta)} V(t) = \int_0^\infty S(\vartheta)\, V(t - \vartheta)\, d\vartheta, \tag{3}$$

dove la funzione $S(\vartheta)$, o *funzione generatrice* dell'operatore suddetto, è determinata da

$$S(\vartheta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Psi(\omega)}{a^2 - a\Psi(\omega)} e^{\omega\vartheta}\, d\omega, \tag{4}$$

e questi integrali sono, nel nostro caso, sempre determinati e convergenti.

Il problema è dunque completamente risoluto, ed il calcolo della funzione $S(\vartheta)$ dipende da due quadrature.

In quanto ai dati sperimentali da assumere e ai mezzi di calcolo da usare per la effettiva esecuzione numerica di quadrature di questo tipo, si possono applicare, con poche modificazioni, i metodi esposti nella citata Nota B dell'ing. Giorgi.

(1) Cfr. Heaviside, *Electromagnetic theory*, vol. II (London, 1899), passim; e Giorgi, Nota citata, *Sul calcolo* ecc., art. 26.

(2) Cfr. Nota citata A, formule (7) e (8), pag. 418; e Nota citata *Sul calcolo* ecc., art. 32.