ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Meccanica. — *Sul problema dei due corpi nel campo gravitazionale di Ritz con potenziale newtoniano ritardato.* Nota di G. Pavanini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. L'ipotesi che le azioni a distanza si propaghino con velocità infinita sembra contrastare con le recenti speculazioni della meccanica, la quale tende, come già in elettrodinamica, a sostituire la legge di Newton con equazioni differenziali che tengano conto della velocità di propagazione della gravitazione [2].

Alcuni autori, come, per esempio, Lehmann-Filhés [3] ed Hepperger [4], tentarono di determinare gli effetti dovuti a tale velocità nel moto dei corpi celesti; ma non poterono giungere a conclusioni positive, poichè le loro equazioni dipendevano in modo essenziale dagli elementi del moto assoluto. Hepperger poi fu condotto a ritenere la velocità di propagazione della forza gravitazionale superiore a 500 volte quella della luce, nel mentre si è tratti ormai a considerare la prima velocità comparabile con la seconda.

Recentemente i sigg. Abraham ed Einstein proposero una nuova teoria della gravitazione suggerita dal principio di relatività, nella quale la velocità della luce si fa dipendere dalla gravitazione.

In due Note, che ebbi l'onore di presentare all'Accademia [5], ho preso in esame il problema dei due corpi nel campo gravitazionale, suggerito dai due insigni geometri. I risultati raggiunti non potevano però dirsi del tutto soddisfacenti per la nuova teoria, poichè « l'assoluto, cacciato dallo schema elettromagnetico, riappariva proprio là dove, con la meccanica classica, era scomparso da secoli ».

Nella presente Nota mi propongo di trattare un problema del tipo di quello ora accennato.

Fra le leggi di propagazione che sono state considerate in elettrodinamica è, senza alcun dubbio, particolarmente notevole quella che si fonda sulla sostituzione dei *potenziali ritardati* ai potenziali ordinarii.

Nel mentre alcune leggi, per esempio quelle di Weber e di Riemann, furono oggetto di applicazioni al moto dei corpi celesti, l'impiego dei po-

[1] Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1914.

[2] Cfr. per es. M. Abraham, *Una nuova teoria della gravitazione*, Nuovo Cimento, ser. VI, vol. IV.

[3] Lehmann-Filhés, Astronomische Nachrichten, n. 2630, 1884.

[4] Hepperger, Sitzungsberichte der Matematische Classe, Vienna, 1888.

[5] *Prime conseguenze di una recente teoria della gravitazione*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXI, 2° sem. 1912; e vol. XXII, 1° sem. 1913.

tenziali ritardati in astronomia non fu per anco discusso, ed è perciò che io mi permetto di farne un primo esperimento trattando il problema dei due corpi con il potenziale ritardato proposto dal sign. Levi-Civita ([1]).

Però, per quanto si riferisce al modo di propagarsi della gravitazione, adotto l'immagine nuova, presa dalla teoria dell'*emissione* e suggerita dal principio di relatività, che fu considerata dal Ritz ([2]). Suppongo, cioè, che un punto materiale emetta onde gravitazionali di velocità radiale costante, formanti, in un istante successivo a quello di emissione, una sfera, il centro della quale sia animato dalla stessa velocità che aveva il punto materiale all'istante dell'emissione.

Stabilisco le equazioni che reggono, in tali circostanze, il moto relativo di uno dei due corpi rispetto all'altro, accontentandomi di tener conto dei termini di secondo grado, rispetto al rapporto fra la velocità dei corpi, e quella di propagazione della gravitazione.

Anzichè tentare, però, l'integrazione rigorosa di tali equazioni, preferisco (ciò che è sufficiente per lo scopo astronomico) interpretare i termini addizionali che in esse si presentano come componenti di una forza perturbatrice, e determinare le variazioni che essa produce sugli elementi del moto col solito metodo di Lagrange.

Questi termini addizionali provengono da un potenziale che è funzione dell'accelerazione del centro di gravità del sistema dei due corpi. Così, neppure in questo caso il moto assoluto può essere evitato. È tuttavia notevole il fatto, che la funzione perturbatrice da me dedotta, non dipende dalla velocità del corpo attraente (come neanche da quello attratto), e quindi le equazioni del moto sono ben più semplici di quelle che avevo ottenute nelle Note ricordate.

Non prive di interesse mi sembrano poi le ultime conclusioni alle quali arrivo; cioè, nel campo gravitazionale indicato dal Ritz, non vi sono disuguaglianze secolari di secondo ordine nel problema dei due corpi con potenziale newtoniano ritardato ([3]).

([1]) Cfr. *Sul campo elettromagnetico generato dalla traslazione uniforme di una carica elettrica*, Nuovo Cimento, ser. V, vol. VI, 1903.

([2]) Cfr. *Oevres* [Paris, Gauthier-Villars, 1911], Memoria XVIII (*Recherches critiques sur l'électrodinamique générale*), parte II, § 1.

([3]) Lo stesso Ritz dedica un paragrafo del suo lavoro sopra ricordato allo studio della gravitazione; però, sia nel metodo sia nei risultati, la mia ricerca differisce essenzialmente da quella del Ritz. Questi, infatti, ricorrendo al criterio delle azioni ponderomotrici elettrodinamiche, presenta una nuova espressione della forza relativa alle azioni fra due cariche elettriche, che permette di eliminare il moto assoluto e di spiegare tutti i fenomeni elettrodinamici finora osservati. Nel caso in cui le velocità delle cariche siano piccole in confronto a quella della luce, semplifica detta espressione introducendo l'immagine di cui io faccio uso nella presente Nota. È questa forza poi che egli applica al problema dei due corpi, supponendone uno immobile, ciò che gli permette di giungere ad

2. *Ipotesi.* — Consideriamo una massa M animata da un movimento noto, ed un punto Q sul quale agisce la forza newtoniana dovuta alla massa M. Se O rappresenta la posizione occupata dalla massa M in un generico istante t, allora, secondo la legge di Newton, il potenziale unitario delle azioni esercitate da M su Q sarebbe $\frac{1}{\overline{OQ}}$.

Introducendo l'ipotesi che le azioni a distanza si propaghino con velocità finita, si deduce invece, in conformità a quanto ha stabilito il sign. Levi-Civita [1], come espressione del potenziale,

$$V = \frac{1}{\sigma} - A \frac{d\frac{1}{\sigma}}{dA},$$

dove A rappresenta il valore inverso della suddetta velocità, e σ la distanza del punto potenziato Q, non precisamente da O, ma da quella posizione anteriore della massa M, donde azioni, propagantisi con velocità $\frac{1}{A}$ arrivano in Q proprio nell'istante considerato.

In tal modo V è l'espressione del *potenziale newtoniano ritardato*, e la costante $\frac{1}{A}$ indica la velocità con la quale si propaga la gravitazione (velocità eguale a quella della luce).

Le azioni emesse dalla massa M nell'istante $\bar{t}$, precedente a t, propagandosi con la stessa velocità radiale $\frac{1}{A}$, si distribuiranno, nell'istante t, sopra una sfera di raggio $\varDelta$ definito dalla relazione

$$\varDelta = \frac{1}{A}(t - \bar{t}).$$

Supponiamo, col Ritz [2], che il centro C di questa sfera si muova anch'esso con moto uniforme nella direzione, e con la velocità che aveva M all'istante $\bar{t}$. Allora in V si deve ritenere $\sigma = \overline{CQ}$, poichè tutto procede

un sistema di equazioni integrabili per quadrature. Io, invece, più semplicemente faccio uso dei due concetti di *potenziale ritardato*, e di *ipotesi balistica* ed ottengo così delle equazioni ben distinte da quelle del Ritz. In particolare, nella condizione in cui si è posto questo autore (sole immobile), sono condotto a delle equazioni, che, a differenza di quelle del Ritz, coincidono in tutto con quelle del moto ellittico.

(1) Cfr. loc. cit., pag. 20.

(2) Cfr. loc. cit., pag. 373. Questa ipotesi corrisponderebbe all'ammettere che in ogni istante da M partissero delle particelle gravitazionali, nello stesso modo che si immagina vengano espulse delle particelle luminose nella teoria dell'emissione della luce.

come se la massa M occupasse nell' istante $\bar{t}$ la posizione C, e l'azione da essa emanata si propagasse in linea retta con la velocità $\frac{1}{A}$.

3. *Espressione del potenziale.* — Consideriamo, ora, due corpi che designeremo, come le loro masse, con m_0 ed m, che occupino, in un generico istante t e rispetto ad un sistema di assi fissi, le posizioni $P_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, $P(\xi, \eta, \zeta)$. Indichiamo con r la distanza $\overline{P_0 P}$: sia cioè

$$r^2 = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2 .$$

Cominciamo dallo studiare l'azione esercitata da m_0 su m. A tal uopo rappresentiamo con $\bar{P}_0$ la posizione occupata da m_0 in un istante $\bar{t}$ anteriore a t; con $\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0$ le coordinate di $\bar{P}_0$, e con $\bar{\xi}'_0, \bar{\eta}'_0, \bar{\zeta}'_0$ le componenti della velocità di m_0 relativa a $\bar{t}$. Adottando le ipotesi enunciate nel numero precedente, il centro C_0 della sfera delle azioni emesse da m_0 nell' istante $\bar{t}$ viene ad avere per coordinate (nell' istante t)

$$[\xi_0] = \bar{\xi}_0 + (t - \bar{t})\, \bar{\xi}'_0 \,, \quad [\eta_0] = \bar{\eta}_0 + (t - \bar{t})\, \bar{\eta}'_0 \,, \quad [\zeta_0] = \bar{\zeta}_0 + (t - \bar{t})\, \bar{\zeta}'_0 .$$

L'equazione adunque di questa sfera è

$$(1) \qquad \varrho^2 = (\xi - [\xi_0])^2 + (\eta - [\eta_0])^2 + (\zeta - [\zeta_0])^2 ;$$

(in tal modo è $\overline{C_0 P} = \varrho$, e quindi la distanza $\overline{CQ}$ del numero precedente coincide con ϱ).

Fissiamo ora l' istante t e la corrispondente posizione P di m. Ad esso possiamo coordinare l' istante d' emissione $\bar{t}$ e la conseguente posizione $\bar{P}_0$ di m_0, in modo che le azioni partite da $\bar{P}_0$ arrivino in P proprio al momento assegnato. Ciò si ottiene tenendo conto della (1) e della relazione, già ricordata,

$$\varrho = \frac{1}{A}(t - \bar{t}) .$$

In base a questa, le coordinate di C_0, calcolate non tenendo conto che dei termini di secondo ordine rispetto al rapporto fra la velocità di m_0 e quella di propagazione della gravitazione, divengono

$$(2) \quad [\xi_0] = \xi_0 - \frac{A^2}{2} \varrho^2 \xi''_0 \,, \quad [\eta_0] = \eta_0 - \frac{A^2}{2} \varrho^2 \eta''_0 \,, \quad [\zeta_0] = \zeta_0 - \frac{A^2}{2} \varrho^2 \zeta''_0 \,,$$

nelle quali $\xi''_0, \eta''_0, \zeta''_0$ rappresentano le componenti dell'accelerazione di m_0 riferita all' istante t.

In conseguenza delle (2), dalla (1) otteniamo

$$\varrho^2 = r^2 + A^2 \varrho^2 \left\{ (\xi - \xi_0)\, \xi''_0 + (\eta - \eta_0)\, \eta''_0 + (\zeta - \zeta_0)\, \zeta''_0 \right\} ,$$

od anche (sostituendo a ϱ^2, nel termine che contiene A^2 a fattore, il suo valore in prima approssimazione)

$$\varrho^2 = r^2 + A^2 r^3 w_{0r}\,,$$

dove w_{0r} indica la componente dell'accelerazione di m_0, secondo la retta $\overline{m_0 m}$.

Nei limiti di approssimazione impostici, abbiamo pure

$$(3) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} - \frac{A^2}{2} w_{0r}\,.$$

Se con U rappresentiamo il potenziale della forza che sollecita m, tenendo conto di quanto dicemmo nel numero precedente, arriviamo alla conclusione

$$(4) \qquad U = fm_0 \left(\frac{1}{r} + \frac{A^2}{2} w_{0r}\right)\,.$$

(f = costante di Gauss).

Con procedimento del tutto analogo a quello ora seguìto, possiamo determinare l'azione esercitata da m su m_0. Indicando con U_0 il potenziale relativo ad m_0, e con w_r la componente dell'accelerazione di m secondo la retta $\overline{m_0 m}$, si ottiene

$$(4') \qquad U_0 = fm \left(\frac{1}{r} - \frac{A^2}{2} w_r\right)\,.$$

Così abbiamo dedotto le espressioni dei potenziali, relativi ai due corpi considerati, nelle condizioni che ci siamo imposte. In essi, i diversi elementi si riferiscono tutti all' istante attuale (t). È notevole il fatto che non si presentano termini di primo ordine in A.

4. *Equazioni del moto.* — Le equazioni che definiscono il moto di m sono

$$\xi'' = \frac{\partial U}{\partial \xi}\,, \quad \eta'' = \frac{\partial U}{\partial \eta}\,, \quad \zeta'' = \frac{\partial U}{\partial \zeta}\,,$$

mentre il moto di m_0 è determinato dalle equazioni analoghe

$$\xi_0'' = \frac{\partial U_0}{\partial \xi_0}\,, \quad \eta_0'' = \frac{\partial U_0}{\partial \eta_0}\,, \quad \zeta_0'' = \frac{\partial U_0}{\partial \zeta_0}\,.$$

Per la (4), il primo gruppo di equazioni si riduce a

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} \xi'' &= -fm_0 \frac{\xi - \xi_0}{r^3} - fm_0 \frac{A^2}{2r^2} \{(\xi - \xi_0)\, w_{0r} - r\xi_0''\}\,, \\ \eta'' &= -fm_0 \frac{\eta - \eta_0}{r^3} - fm_0 \frac{A^2}{2r^2} \{(\eta - \eta_0)\, w_{0r} - r\eta_0''\}\,, \\ \zeta'' &= -fm_0 \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} - fm_0 \frac{A^2}{2r^2} \{(\zeta - \zeta_0)\, w_{0r} - r\zeta_0''\}\,; \end{aligned}\right.$$

e per la (4'), il secondo gruppo si presenta sotto la forma

$$(5')\quad \begin{cases} \xi_0'' = fm\,\dfrac{\xi-\xi_0}{r^3} - fm\,\dfrac{A^2}{2r^2}\{(\xi-\xi_0)\,w_r - r\xi''\}\,, \\[2ex] \eta_0'' = fm\,\dfrac{\eta-\eta_0}{r^3} - fm\,\dfrac{A^2}{2r^2}\{(\eta-\eta_0)\,w_r - r\eta''\}\,, \\[2ex] \zeta_0'' = fm\,\dfrac{\zeta-\zeta_0}{r^3} - fm\,\dfrac{A^2}{2r^2}\{(\zeta-\zeta_0)\,w_r - r\zeta''\}\,. \end{cases}$$

Da queste equazioni deduciamo quelle che esprimono il moto di m rispetto ad m_0. A questo fine assumiamo un sistema di assi paralleli agli assi fissi ed avente l'origine in m_0. Se x, y, z, indicano le coordinate di m nel nuovo sistema, abbiamo

$$x = \xi - \xi_0\ ,\quad y = \eta - \eta_0\ ,\quad z = \zeta - \zeta_0\,,$$

e, quindi, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Poniamo ancora

$$\begin{cases} m\xi + m_0\xi_0 = (m+m_0)\,X\,, \\ m\eta + m_0\eta_0 = (m+m_0)\,Y \\ m\zeta + m_0\zeta_0 = (m+m_0)\,Z\,; \end{cases}$$

così X, Y, Z, vengono ad essere le coordinate del centro di gravità del sistema dei due corpi m_0, m.

Le cercate equazioni del moto di m rispetto ad m_0 si ottengono sottraendo le (5') dalle (5); tenuto conto delle formule di posizione, esse sono

$$(6)\quad \begin{cases} x'' + \dfrac{k^2}{r^3}\,x = \dfrac{f^2A^2}{2k^2r^2}\{(m^2-m_0^2)\,(W_r x - r\lambda) + 2mm_0\,(a_r x - rx'')\}\,, \\[2ex] y'' + \dfrac{k^2}{r^3}\,y = \dfrac{f^2A^2}{2k^2r^2}\{(m^2-m_0^2)\,(W_r y - r\mu) + 2mm_0(a_r y - ry'')\}\,, \\[2ex] z'' + \dfrac{k^2}{r^3}\,z = \dfrac{f^2A^2}{2k^2r^2}\{(m^2-m_0^2)\,(W_r z - r\nu) + 2mm_0(a_r z - rz'')\}\,, \end{cases}$$

nelle quali λ, μ, ν rappresentano le componenti dell'accelerazione del centro di gravità del sistema dei due corpi considerati; W_r ed a_r le componenti secondo la retta $\overline{m_0 m}$ rispettivamente di detta accelerazione e di quella di m; ed infine $k^2 = f(m+m_0)$.

Le equazioni (6) si possono presentare anche sotto altra forma. Perciò poniamo

$$F = \frac{k^2}{r}\ ,\quad \Phi = \frac{f(m_0-m)}{2}\,A^2 W_r\,,$$

e risolviamo le (6) rispetto ad x'', y'', z''. Nell'ordine d'approssimazione prefissatoci, avremo in definitiva

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial(F + \Phi)}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial(F + \Phi)}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial(F + \Phi)}{\partial z}.$$

Siamo così condotti a concludere che nelle nostre ipotesi il moto di m relativo ad m_0 dipende da forze conservative, il potenziale delle quali si compone di due termini: uno (F) rappresenta l'ordinario potenziale newtoniano; l'altro (Φ) può considerarsi la *funzione perturbatrice* del moto preso in esame. Questa funzione dipende, fatta astrazione dagli elementi di posizione e dalle masse, unicamente dall'accelerazione del sistema dei due corpi.

Per $A = 0$, cioè per una propagazione istantanea della gravitazione, Φ si annulla, e siamo quindi condotti all'ordinario moto ellittico. Ma siamo pure condotti al moto ellittico anche quando si considerano due corpi di egual massa, oppure quando si ritiene uniforme il moto del centro di gravità del sistema di m e m_0, o, più semplicemente, nell'ipotesi che la componente dell'accelerazione di detto sistema secondo la retta $\overline{m_0 m}$ sia costantemente nulla.

5. *Le disuguaglianze secolari.* — Esaminiamo, in ogni caso, quali sono le perturbazioni degli elementi del moto ellittico prodotte dalla forza derivante dal potenziale Φ. Questo studio si compie agevolmente, servendosi delle equazioni che dànno le variazioni delle costanti arbitrarie. Per l'uso di tali equazioni è necessario conoscere le componenti S, T, W della forza perturbatrice rispettivamente secondo la direzione del raggio vettore, della normale a questo raggio contenuta nel piano dell'orbita osculatrice, e della normale a questo piano.

Con tutta facilità si ottiene [1]

$$S = 0,$$

$$T = -\frac{f(m_0 - m)}{2r} A^2(\sigma_1 \operatorname{sen} w + \sigma_2 \cos w),$$

$$W = \frac{f(m_0 - m)}{2r} A^2 \sigma_3,$$

nelle quali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono le componenti dell'accelerazione del sistema dei due corpi m_0 e m secondo i nuovi assi, quando questi occupano la posizione perielia; e w rappresenta l'*anomalia vera*.

Supponiamo, poi, che $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ non variino col tempo: ammettiamo cioè che sia costante l'accelerazione del sistema dei due corpi. Sostituendo allora nelle equazioni, ben note, che dànno le variazioni delle costanti

[1] Per brevità ho omesso questo ed i successivi calcoli. Essi si conducono in modo identico, per es., agli analoghi da me svolti nella seconda delle Note ricordate.

$a , e , \varphi , \theta , \varpi , \varepsilon$ (cioè: *semiasse maggiore, eccentricità, inclinazione, longitudine del nodo, longitudine del perielio, longitudine media all'epoca* 0), alle componenti S, T, W i loro valori soprascritti, assumendo w come variabile di integrazione, integrando, e non tenendo conto che dei termini secolari, siamo condotti alle relazioni

$$\delta a = \delta e = \delta \varphi = \delta \theta = \delta \varpi = \delta \varepsilon = 0 .$$

Questi risultati confermano quanto già avevamo asserito: le nostre ipotesi, cioè, non conducono a nessuna disuguaglianza secolare di secondo ordine rispetto al rapporto fra la velocità dei corpi e quella di propagazione dell'azione newtoniana.

Fisica. — *Il campo elettrico nello spazio di Hittorf-Crookes e la scomposizione elettrica delle righe spettrali.* Nota di ANTONINO LO SURDO, presentata dal Corrisp. A. GARBASSO [1].

La scomposizione delle righe spettrali per effetto del campo elettrico, si può osservare direttamente nei tubi di scarica [2], in quella regione che va dal catodo al limite tra lo spazio oscuro di Hittorf-Crookes, e il secondo strato di luminosità negativa, e che per brevità chiamerò spazio oscuro.

I valori che può assumere il campo elettrico nello spazio oscuro, dipendono essenzialmente dalla caduta di potenziale catodica, cioè la differenza di potenziale complessiva fra il catodo ed il limite dello spazio oscuro; dalla lunghezza di detto spazio, e dalla legge colla quale il potenziale è in esso distribuito.

La caduta catodica. — Essa risulta indipendente dalla pressione del gas e dalla intensità della corrente che passa nel tubo di scarica, finchè non tutto il catodo è coperto dallo strato di luminosità negativa. In tali condizioni la caduta catodica si chiama normale e dipende dalla natura del gas e dal materiale degli elettrodi: per l'idrogeno puro con elettrodi di alluminio essa venne trovata di 168 volts [3].

Col crescere della corrente, la luminosità negativa si estende sul catodo fino a coprirlo tutto o a raggiungere le pareti del tubo se esse ne limitano la sua superficie: allora comincia a crescere anche la caduta catodica, che può assumere valori grandissimi come quelli che occorrono nel caso nostro.

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1914.

(2) Ant. Lo Surdo, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, serie 5ª, 2° sem., fasc. 12°, seduta del 21 dicembre 1913; vol. XXIII, 1° sem., fasc. 4°, seduta del 15 febbraio 1914.

(3) Warburg, Wied. Ann., XL, pag. 1 (1890).