ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1914.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sull'integrazione delle equazioni a derivate parziali, lineari ed a coefficienti costanti del second'ordine.* Nota del Corrispondente O. Tedone [1].

Cercando un modo di dare assetto definitivo alle mie ricerche sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali, lineari ed a coefficienti costanti, del second'ordine, di tipo iperbolico che son venuto pubblicando in questi Rendiconti durante gli anni 1913 e 1914, ho riconosciuto che alla integrazione delle equazioni del tipo indicato, si può pervenire, in ogni caso ed in modo semplice ed uniforme, senza ricorrere ad inversione di speciali integrali, o, come l'Hadamard [2], all'ausilio di nuove concezioni analitiche. È, precisamente, lo scopo di questa Nota quello di esporre il nuovo metodo, e le formole di integrazione a cui esso conduce.

I.

L'equazione più generale a derivate parziali del second'ordine, lineare ed a coefficienti costanti di tipo iperbolico si può ridurre alla forma

$$\sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i^2} - \sum_1^q {}_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_j^2} + k\varphi = 0 , \tag{1}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1914.

[2] Acta math., tom. 41, pag. 333.

in cui abbiamo conservato, per maggiore generalità, la costante k alla quale si potrà attribuire qualunque valore positivo, o negativo, compreso lo zero. Ed il procedimento che vogliamo seguire per ottenere, in ogni caso, l'integrazione della (1) sarà basato ancora sul metodo delle caratteristiche di Riemann-Volterra nel quale, com'è ben noto, la funzione incognita φ è considerata come funzione di punti nello spazio lineare S_{p+q} a $p+q$ dimensioni in cui le $p+q$ variabili ξ_i ed η_j sono le coordinate di un punto generico e si fa uso, quasi esclusivamente, delle nozioni fondamentali di *teorema di reciprocità*, di *varietà caratteristica* e di *funzione fondamentale*.

Se indichiamo con Σ una varietà regolare a $p+q-1$ dimensioni che limiti una regione finita di S_{p+q}, con n la normale interna, con D il simbolo di derivata *conormale*, poniamo cioè

$$(2) \qquad D\varphi = \sum_1^p {}_i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \cos(n\xi_i) - \sum_1^q {}_j \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_j} \cos(n\eta_j),$$

e con φ e φ' due soluzioni regolari, distinte, qualunque della (1), il teorema di reciprocità, relativo a questa equazione, si scriverà

$$(3) \qquad \int_\Sigma (\varphi D\varphi' - \varphi' D\varphi)\, d\Sigma = 0 .$$

La varietà conica caratteristica relativa all'equazione stessa (1) e che ha il vertice nel punto (x_i, y_i) dello spazio S_{p+q}, ha per equazione

$$(4) \qquad r^2 - t^2 = 0 \quad , \quad r = \sqrt{\sum_1^p {}_i (x_i - \xi_i)^2} \quad , \quad t = \sqrt{\sum_1^q {}_j (y_j - \eta_j)^2} \, .$$

E, poichè intendiamo di escludere completamente dalle nostre considerazioni il caso $p = q = 1$, resta da distinguere, per riguardo a questa varietà caratteristica, i due soli casi in cui uno dei due numeri p e q è eguale ad uno e quello in cui tutti e due questi numeri sono più grandi di uno. Nel primo caso e se è $q = 1$, la varietà caratteristica (4) divide S_{p+q} in tre regioni distinte, linearmente connesse ed indefinite:

$$1^a \; r^2 - t^2 > 0 \;,\; 2^a \; r^2 - t^2 < 0 \text{ con } y_1 > \eta_1 \;,\; 3^a \; r^2 - t^2 < 0 \text{ con } y_1 < \eta_1 .$$

Nel secondo caso, invece, la varietà (4) divide S_{p+q} in due sole regioni distinte, ancora linearmente connesse ed indefinite

$$1^a \quad r^2 - t^2 > 0 \,, \quad 2^a \quad r^2 - t^2 < 0 \,,$$

e l'equazione (1) si comporta allo stesso modo rispetto ai due gruppi di coordinate ξ_i e η_j. È lecito, sotto certe restrizioni, facili a determinarsi in ciascun caso particolare, scambiare questi due gruppi di variabili, in tutte le formole relative alla (1), purchè, contemporaneamente, si cambii il segno di k.

Come soluzioni fondamentali della (1), infine, assumeremo le soluzioni di questa equazione, già considerate dal Coulon [1], le quali dipendono soltanto da r e t e sono della forma

$$(5)\qquad \varphi_\lambda = t^\lambda \psi(\theta)\, f(z) \quad , \quad \theta = \frac{r^2}{t^2} \quad , \quad z = \sqrt{k}\,\sqrt{t^2 - r^2}\ ,$$

con λ numero qualunque e ψ ed f funzioni soddisfacenti alle equazioni:

$$(6)\qquad \theta(1-\theta)\,\psi''(\theta) + \left[\frac{p}{2} - \left(1 - \frac{2\lambda + q - 2}{2}\right)\theta\right]\psi'(\theta) - \\ - \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{\lambda + q - 2}{2}\,\psi(\theta) = 0\ ,$$

$$(7)\qquad f''(z) + \frac{p + q + 2\lambda - 1}{z} f'(z) - f(z) = 0\ ,$$

nelle quali gli accenti sono simboli di derivate. Si supporrà, inoltre, che, per $\theta = 1$ e quindi per $z = 0$, ψ si annulli ed f resti finita, mentre, per $r = 0$, la $\psi(\theta)$ diventi infinita come r^{2-p} quando $p > 2$, e come $\log r$ quando $p = 2$.

Seguendo il Coulon prenderemo $\psi(\theta)$ sotto la forma

$$(8)\qquad \psi(\theta) = \theta^{1-\frac{p}{2}}(1-\theta)^{\frac{p+q}{2}+\lambda-1}\ \mathrm{F}\left(\frac{\lambda+2}{2}, \frac{\lambda+q}{2}, \frac{p+q}{2} + \lambda, 1-\theta\right),$$

dove F è il simbolo di funzione ipergeometrica, mentre per $f(z)$ prenderemo la funzione

$$(9)\qquad f(z) = z^{-\left(\frac{p+q}{2}+\lambda-1\right)}\ \mathrm{I}_{\frac{p+q}{2}+\lambda-1}(z)\ ,$$

essendo

$$\mathrm{I}_\varkappa(z) = \sum_0^\infty{}_s \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\varkappa+2s}}{s!\,\pi(\varkappa+s)} \quad , \quad \pi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha\, dx\ .$$

La funzione $f(z)$, così determinata, soddisfa, in tutti i casi, alle condizioni volute. La funzione $\psi(\theta)$, determinata dalla (8), soddisferà a tutte le condizioni richieste, nell'ipotesi di $p > 2$, se $p + q + 2\lambda - 2 > 0$ ed

$$\left(\frac{\lambda+2}{2}, \frac{\lambda+q}{2}, \frac{p+q}{2} + \lambda, 1\right)$$

[1] Thèse-Hermann, 1902, pag. 56 e segg.

è convergente per la qual cosa si richiede che sia, oltre a $p > 2$, anche:

$$p + \lambda > 0 \quad , \quad p + q + \lambda - 2 > 0 \quad , \quad p + q + 2\lambda > 0 .$$

Poichè

$$2(p + q + \lambda - 2) = (p - 2) + q + (p + q + 2\lambda - 2) ,$$

tutte le disuguaglianze precedenti saranno soddisfatte se λ soddisferà alle condizioni

$$(10) \qquad p + \lambda > 0 \quad , \quad p + q + 2\lambda - 2 > 0 .$$

Quando $p = 2$ la funzione $\psi(\theta)$, determinata dalla (8), si annulla ancora per $\theta = 1$ se $q + 2\lambda > 0$; e poichè, in questo caso, nell'intorno di $\theta = 0$, la $\psi(\theta)$ ha la forma

$$(c + \log \theta)\, \mathrm{F}\left(-\frac{\lambda}{2}\, , -\frac{\lambda + q - 2}{2}\, , 1\, , \theta\right) + \Phi(\theta) ,$$

dove c è una determinata costante, e $\Phi(\theta)$ è, come F, una serie convergente in tutto il cerchio di raggio uno, il contorno di questo cerchio compreso, se anche $\mathrm{F}\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda + q - 2}{2}, 1, 1\right)$ è convergente, la funzione ψ, data dalla (8), soddisferà a tutte le condizioni richieste, anche in questo caso, se la serie $\mathrm{F}\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda + q - 2}{2}, 1, 1\right)$ è convergente. Per ciò si richiede che sia:

$$\lambda + 2 > 0 , \quad q + \lambda > 0 \quad , \quad q + 2\lambda > 0 .$$

Poichè supporremo che q possa acquistare tutti valori possibili compresa l'unità, non c'è luogo a considerare, per p, il valore uno.

Divideremo in parti la trattazione del nostro argomento. Nelle prime due tratteremo i casi particolari più importanti per le applicazioni: $p = 3$, $q = 1$ e $p = 2$, $q = 1$. Nella terza parte tratteremo il caso più generale $p = 2m + 1$, $q = 1$ e nella quarta quello in cui p e q hanno valori qualunque tutti e due maggiori di uno. Trascureremo di occuparci ulteriormente del caso $p = 2m$, $q = 1$, con $m > 1$, essendo le formole da noi già date (¹), per questo caso, delle più semplici.

II.

Caso $p = 3$, $q = 1$. — L'equazione da integrare, in questo caso, la scriveremo

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + k\varphi = 0 .$$

(¹) In questi Rendic., seduta 5 aprile 1914, *Su l'inversione* ecc., pag. 477 e segg.

Seguendo poi il procedimento usuale, consideriamo la regione finita dello spazio lineare a quattro dimensioni (ξ, η, ζ, τ) limitata dalla varietà conica caratteristica

$$r^2 - (t-\tau)^2 = 0 \quad , \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \ ,$$

avente il vertice nel punto (x, y, z, t) dello stesso spazio, dalla varietà cilindrica $r = \varepsilon$, e da una porzione Σ' di una varietà regolare a tre dimensioni, incontrata, generalmente, in un punto solo da ogni parallela all'asse τ e nella quale, per fissare le idee, sia, oltre che $r^2 < (t-\tau)^2$, anche $t > \tau$. In questa regione applicheremo il teorema di reciprocità a ciascuna delle due coppie di funzioni (φ, φ_0) e (φ, φ_1), φ essendo una soluzione regolare qualunque della (11) e φ_0, φ_1 le due soluzioni che si ottengono dall'espressione generale (5) per le soluzioni fondamentali, facendo in essa, oltre a $p = 3$, $q = 1$, una volta $\lambda = 0$, ed un'altra volta $\lambda = 1$. Queste due funzioni si pongono facilmente sotto la forma:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_0 = \left(\frac{t-\tau}{r} - 1\right)\frac{\mathrm{I}_1(z)}{z} \quad , \quad \varphi_1 = r\left(\frac{t-\tau}{r} - 1\right)^2 \frac{\mathrm{I}_2(z)}{z^2} \ , \\ &\qquad\qquad z = \sqrt{k}\,\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2} \ . \end{aligned} \right.$$

Andando al limite, per $\varepsilon = 0$, e chiamando Σ ciò che diventa allora Σ', le due formole che si ottengono al modo precedente, ci dànno:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} \varphi(x, y, z, \tau)\, \mathrm{I}_1[(t-\tau)\sqrt{k}]\, d\tau = \frac{\sqrt{k}}{4\pi}\int_{\Sigma} (\varphi \mathrm{D}\varphi_0 - \varphi_0 \mathrm{D}\varphi)\, d\Sigma = \Phi_0 \ , \\ &\int_{t_0}^{t} \varphi(x, y, z, \tau)\, \mathrm{I}_2[(t-\tau)\sqrt{k}]\, d\tau = \frac{k}{4\pi}\int_{\Sigma} (\varphi \mathrm{D}\varphi_1 - \varphi_1 \mathrm{D}\varphi)\, d\Sigma = \Phi_1 \ , \end{aligned} \right.$$

dove t_0 è il valore di τ corrispondente al punto d'incontro di Σ con la retta $r = 0$ e, naturalmente,

$$\mathrm{D}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\cos(n\xi) + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\cos(n\eta) + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\cos(n\zeta) - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\cos(n\tau) \ .$$

Derivando la prima delle (13), rispetto a t, tenendo quindi conto della relazione

$$2\,\frac{d\,\mathrm{I}_1(z)}{dz} = \mathrm{I}_2(z) + \mathrm{I}_0(z) \ ,$$

e della seconda delle (13) stesse, si trova

$$(13') \quad \int_{t_0}^{t} \varphi(x, y, z, \tau)\, \mathrm{I}_0[(t-\tau)\sqrt{k}]\, d\tau = \frac{2}{\sqrt{k}}\,\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} - \Phi_1 \ .$$

Basta allora derivare nuovamente la (13′), rispetto a t, e tener conto ancora della prima della (13), per trovare la formola richiesta:

$$\text{(A)} \qquad \varphi(x\,,\,y\,,\,z\,,\,t) = -\sqrt{k}\,\Phi_0 + \frac{2}{\sqrt{k}}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\,.$$

Formola di Weber. — Osserviamo, prima di tutto, che possiamo scrivere

$$\varphi_0 = \frac{1}{kr}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\right) I_0(z),$$

e che, analogamente, tenendo conto che

$$\frac{2}{z}\,I_2(z) = I_1(z) - \frac{d}{dz}\,I_2(z) = 2\,\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}\,\frac{dI_0(z)}{dz}\right],$$

si può scrivere

$$\varphi_1 = \frac{1}{k^2 r}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 I_0(z).$$

Supponiamo ora che la porzione di varietà Σ a tre dimensioni che compare nella formola (A) faccia parte dell'iperpiano $\tau = 0$ e che, quindi, sia:

$$D\varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}\quad,\quad D\varphi_0 = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right)_{\tau=0}\quad,\quad D\varphi_1 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right)_{\tau=0}\,,$$

per cui, se poniamo:

$$\frac{r}{4\pi}\int_\Omega \varphi\, d\Omega = \psi(r)\quad,\quad \frac{r}{4\pi}\int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} d\Omega = \Psi(r)\,,$$

Ω essendo la superficie di una sfera ordinaria di raggio eguale all'unità appartenente all'iperpiano $\tau = 0$, col centro nel punto $(x\,,y\,,z\,,0)$ di questo iperpiano, avremo:

$$\Phi_0 = \sqrt{k}\int_0^t r\,dr\left[\psi(r)\,\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \Psi(r)\,\varphi_0\right],$$

$$\Phi_1 = k\int_0^t r\,dr\left[\psi(r)\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \Psi(r)\,\varphi_1\right].$$

Sostituendo questi valori di Φ_0 e Φ_1 nella (A) si ha subito la formola

$$\varphi(x\,,y\,,z\,,t) = \psi'(t) + \Psi(t) + \frac{kt}{2}\,\psi(t) +$$

$$+\int_0^t dr\left[\psi(r)\,\frac{\partial}{\partial t} + \Psi(r)\right]\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\times$$

$$\times\left\{-I_0(z) + \frac{2}{k}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,I_0(z) - \frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial t}\,I_0(z)\right\},$$

con

$$z = \sqrt{k}\,\sqrt{t^2 - r^2}\,,$$

e dove $\psi'(t)$ indica la derivata di $\psi(t)$ rispetto al suo argomento t. Basta allora ricordare che

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+k\right)\mathrm{I}_0(z)=0$$

perchè la formola precedente si riduca subito a quella di Weber

$$(\mathrm{A}')\qquad \varphi(x\,,y\,,z\,,t)=\psi'(t)+\Psi(t)+\frac{kt}{2}\psi(t)-$$
$$-\int_0^t dr\left[\psi(t)\frac{\partial}{\partial t}+\Psi(r)\right]\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{I}_0\left[\sqrt{k}\sqrt{t^2-r^2}\right].$$

Per $k=0$ la formola si riduce ai due suoi primi termini, e diventa la formola di Poisson. Dalla (A) sarebbe pure facile ottenere la generalizzazione della formola di Kirchhoff al caso di onde smorzate che però non può interpretarsi come traducente un principio di Huyghens che, per il caso di onde smorzate, non sussiste.

III.

Caso $p=2$, $q=1$. — In questo caso l'equazione da integrare si scriverà

$$(14)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}+k\varphi=0\,,$$

e, per k positiva, può interpretarsi come una trasformata dell'equazione delle onde cilindriche smorzate. Questo caso particolare della nostra questione è importante anche perchè le operazioni di cui ha bisogno il metodo delle caratteristiche si possono eseguire tutte nello spazio ordinario.

Interpretiamo dunque ξ, η e τ come le coordinate cartesiane ortogonali di un punto dello spazio, e consideriamo la porzione di spazio limitata dal cono caratteristico

$$r^2-(t-\tau)^2=0\qquad,\qquad r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,,$$

avente il vertice nel punto $(x\,,y\,,t)$, dal cilindro $r=\varepsilon$ e dalla porzione σ' di una superficie regolare, incontrata, generalmente, in un punto solo da ogni parallela all'asse τ e tale che, per fissare le idee, in tutta questa porzione di spazio, oltre a $r^2<(t-\tau)^2$, sia $t>\tau$. Il procedimento da seguire ora è in tutto analogo a quello seguìto nel caso precedente. Chiamando ancora φ_0 e φ_1 le due soluzioni della (14) che si ottengono dalla formola generale (5) facendo in questa, oltre a $p=2$, $q=1$ anche $\lambda=0$, e $\lambda=1$, applichiamo il teorema di reciprocità, relativo alla (14), alle due coppie di funzioni $(\varphi\,,\varphi_0)$ e $(\varphi\,,\varphi_1)$ dove φ è una soluzione regolare qualunque della (14), nella porzione di spazio che innanzi abbiamo indicata e andiamo al limite per $\varepsilon=0$.

Notiamo, prima di andare avanti, che le due funzioni φ_0 e φ_1 hanno ora per espressioni:

$$(15)\qquad \begin{cases} \varphi_0 = \dfrac{I_{\frac{1}{2}}(z)}{z^{\frac{1}{2}}} \log \dfrac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{1-\theta}}\,, \\[2ex] \varphi_1 = (t-\tau)\, \dfrac{I_{\frac{3}{2}}(z)}{z^{\frac{3}{2}}} \left[\log \dfrac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{1-\theta}} + \sqrt{1-\theta} \right], \end{cases}$$

dove:

$$\theta = \frac{r^2}{(t-\tau)^2} \quad , \quad z = \sqrt{k}\,\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}\,.$$

Chiamando poi σ ciò che diventa σ', per $s=0$, e, notando che:

$$\frac{I_{\frac{1}{2}}(z)}{z^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{Sen} z}{z} \quad , \quad \frac{I_{\frac{3}{2}}(z)}{z^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{d}{dz}\,\frac{\operatorname{Sen} z}{z}\,,$$

dove Sen è il simbolo di seno iperbolico, possiamo scrivere le due formole:

$$(16)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \varphi(x\,,y\,,\tau)\, \frac{\operatorname{Sen}\left[(t-\tau)\sqrt{k}\right]}{(t-\tau)\sqrt{k}}\, d\tau = \\[2ex] \displaystyle\qquad\qquad = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_\sigma (\varphi D\varphi_0 - \varphi_0 D\varphi)\, d\sigma = \Phi_0\,, \\[2ex] \displaystyle\int_{t_0}^{t} \varphi(x\,,y\,,\tau)\, \frac{\partial}{\partial t}\, \frac{\operatorname{Sen}\left[(t-\tau)\sqrt{k}\right]}{(t-\tau)\sqrt{k}}\, d\tau = \\[2ex] \displaystyle\qquad\qquad = \frac{k}{2\sqrt{2\pi}} \int_\sigma (\varphi D\varphi_1 - \varphi_1 D\varphi)\, d\sigma = \Phi_1\,, \end{cases}$$

i simboli t_0 e D avendo i significati analoghi a quelli del caso precedente. Basta derivare la prima di queste due formole, rispetto a t, e tener conto della seconda di esse per aver la formola cercata

$$(B)\qquad \varphi(x\,,y\,,t) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} - \Phi_1\,.$$

Caso in cui σ appartiene al piano $\tau = 0$. — In questa ipotesi si ha:

$$\Phi_0 = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_\sigma \left(\varphi\, \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \varphi_0\, \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} d\sigma\,,$$

$$\Phi_1 = -\frac{k}{2\sqrt{2\pi}} \int_\sigma \left(\varphi\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \varphi_1\, \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} d\sigma\,,$$

σ essendo l'area della circonferenza di raggio t del piano $\tau = 0$ col centro nel punto $(x, y, 0)$, e quindi la formola (B) si può porre sotto la forma

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma \varphi \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - k\varphi_1\right)_{\tau=0} d\sigma - \\ - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - k\varphi_1\right)_{\tau=0} d\sigma .$$

Notando poi che

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - k\varphi_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} \operatorname{Cos}\left(\sqrt{k}\sqrt{t^2 - r^2}\right) ,$$

il Cos essendo il simbolo di coseno iperbolico, la formola stessa diventa

$$\text{(B')} \qquad \varphi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma \varphi \frac{\operatorname{Cos}\left(\sqrt{k}\sqrt{t^2 - r^2}\right)}{\sqrt{t^2 - r^2}} d\sigma + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\operatorname{Cos}\left(\sqrt{k}\sqrt{t^2 - r^2}\right)}{\sqrt{t^2 - r^2}} d\sigma .$$

Per $k = 0$, questa formola diventa quella notissima di Parseval-Poisson.

IV.

Caso $p = 2m + 1$ *con* $m > 1$, $q = 1$. — Poniamo la nostra equazione, in questo caso, sotto la forma

$$\text{(17)} \qquad \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + k\varphi = 0 .$$

Chiamiamo R' la regione finita dello spazio lineare S_{p+1} a $p + 1$ dimensioni, in cui (ξ_i, τ) sono le coordinate di un punto generico, limitata dalla varietà conica caratteristica

$$r^2 - (t - \tau)^2 = 0 \quad , \quad r = \sqrt{\sum_1^p {}_i (x_i - \xi_i)^2} ,$$

dalla varietà cilindrica $r = \varepsilon$, ε essendo una costante che poi faremo tendere a zero, e dalla porzione Σ' di una varietà regolare a p dimensioni, incontrata, generalmente, in un punto solo da ogni parallela all'asse τ, nella quale sia $r^2 < (t - \tau)^2$ e, per fissare le idee, anche $t > \tau$. Al limite, poi, per $\varepsilon = 0$, chiamiamo Σ ciò che diventa Σ'.

Applicheremo ora il teorema di reciprocità, relativo alla (17), nella regione R′ ad una soluzione regolare qualunque, ma fissa, φ di (17) ed a ciascuna delle soluzioni fondamentali:

$$(18)\quad \varphi_\lambda = (t-\tau)^\lambda\, \theta^{1-\frac{p}{2}} (1-\theta)^{m+\lambda}\, \mathrm{F}\left(\frac{\lambda+2}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, m+\lambda+1, 1-\theta\right)\cdot$$
$$\cdot\, s^{-(m+\lambda)}\, \mathrm{I}_{m+\lambda}(s),$$

con

$$\theta = \frac{r^2}{(t-\tau)^2}\quad,\quad s = \sqrt{k}\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2},$$

ed in cui si suppone che λ acquisti tutti i valori $-1, 0, 1, 2, \ldots, \infty$ per i quali valori di λ le condizioni (10) sono soddisfatte. Le formole che così si ottengono, al limite, per $s = 0$, ci daranno le infinite relazioni seguenti:

$$(19)\quad \int_{t_0}^{t} \varphi(x_i, \tau)\,(t-\tau)^{m-1}\, \mathrm{I}_{m-1+l}\left[(t-\tau)\sqrt{k}\right] d\tau = \Phi_l\,,\quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

dove le Φ_l sono espressioni note costruite con i valori che φ e $\mathrm{D}\varphi$ acquistano nei punti di Σ, e t_0 è il valore di τ corrispondente al punto d'incontro di Σ con la retta $r = 0$.

Non tutte le relazioni (19) sono necessarie per ottenere l'integrazione della (17), ma la loro considerazione complessiva permette di esporre il nostro procedimento con maggiore semplicità e simmetria.

Il primo passo consisterà nel dimostrare che dalle (19) si possono ottenere le altre relazioni:

$$(20)\quad \int_{t_0}^{t} \varphi(x_i, \tau)\,(t-\tau)^{m-2}\, \mathrm{I}_{m-2+l}\left[(t-\tau)\sqrt{k}\right] d\tau = \Phi_l^{(1)}\,,\quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

in cui le $\Phi_l^{(1)}$ sono combinazioni molto semplici delle Φ_l.

Cominciamo a far vedere che, data la serie delle relazioni (19), può facilmente aggiungersene un'altra che corrisponde al valore -1 di l. Se, infatti, deriviamo, rispetto a t, la relazione che si ottiene dalle (19) per $l = 0$, tenendo conto della formola

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{(t-\tau)^{m-1}\, \mathrm{I}_{m-1}\left[(t-\tau)\sqrt{k}\right]\right\} = \sqrt{k}\,(t-\tau)^{m-1}\, \mathrm{I}_{m-2}\left[(t-\tau)\sqrt{k}\right],$$

troviamo subito

$$(19')\quad \int_{t_0}^{t} \varphi(x_i, \tau)\,(t-\tau)^{m-1}\, \mathrm{I}_{m-2}\left[(t-\tau)\sqrt{k}\right] d\tau = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = \Phi_{-1}\,.$$

Supponiamo ora completata la serie delle relazioni (19) con la (19′). Derivando rispetto a t una qualunque delle (19), abbiamo

$$(m-1)\int_{t_0}^{t} \varphi(x_i\,,\tau)\,(t-\tau)^{m-2}\,\mathrm{I}_{m-1+l}\left[(t-\tau)\sqrt{k}\right]d\tau +$$
$$+\frac{\sqrt{k}}{2}\int_{t_0}^{t} \varphi(x_i\,,\tau)\,(t-\tau)^{m-1}\left[\mathrm{I}_{m+l}(\ldots)+\mathrm{I}_{m-2+l}(\ldots)\right]d\tau=\frac{\partial\Phi_l}{\partial t}\,,$$

tenuto conto della formola

$$(a)\qquad 2\,\mathrm{I}'_n(z)=\mathrm{I}_{n+1}(z)+\mathrm{I}_{n-1}(z)\,.$$

Dalla relazione precedente, con l'aiuto delle (19) ancora e (19′), si ottiene

$$(21)\qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(x_i\,,\tau)\,(t-\tau)^{m-2}\,\mathrm{I}_{m-2+l}\left[(t-\tau)\sqrt{k}\right]d\tau=$$
$$=\frac{1}{m-1}\left\{\frac{\partial\Phi_{l-1}}{\partial t}-\frac{\sqrt{k}}{2}(\Phi_l+\Phi_{l-2})\right\}=\Phi_l^{(1)}\,,$$

ed in questa formola l può variare, evidentemente, soltanto da $l=1$ ad $l=\infty$. Resta a trovare quella delle (20) che corrisponde al valore $l=0$. Perciò, seguendo un procedimento già altra volta indicato, deriviamo la (19′), rispetto a t in due modi: una prima volta considerando $(t-\tau)^{m-1}\,\mathrm{I}_{m-2}(\ldots)$ come prodotto $(t-\tau)$ e di $(t-\tau)^{m-2}\,\mathrm{I}_{m-2}(\ldots)$, ed applicando ancora la stessa relazione fra le funzioni di Bessel che ci ha procurata la (19′) un'altra volta considerando $(t-\tau)^{m-1}\,\mathrm{I}_{m-2}(\ldots)$ come prodotto di $(t-\tau)^{m-1}$ e di $\mathrm{I}_{m-2}(\ldots)$, ed esprimendo la derivata di I_{m-2} per le stesse funzioni di Bessel. Dal paragone delle due formole risultanti si arriva subito alla relazione domandata

$$(21')\qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(x_i\,,\tau)\,(t-\tau)^{m-2}\,\mathrm{I}_{m-2}\left[(t-\tau)\sqrt{k}\right]d\tau=$$
$$=\frac{1}{(2m-3)\sqrt{k}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-k\right)\Phi_0=\Phi_0^{(1)}\,.$$

Come ora dalle (19) siamo passati alle (20), ossia (21) e (21′), ripetendo $m-1$ volte questo processo di riduzione, arriveremo alle formole:

$$(22)\qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(x_i\,,\tau)\,\mathrm{I}_l\left[(t-\tau)\sqrt{k}\right]d\tau=\Phi_l^{(m-1)}\,,\qquad l=0\,,1\,,2\,,\ldots$$

Basta allora derivare la prima di queste relazioni, rispetto a t, e tener conto della seconda per avere la formola definitiva

$$(\mathrm{C})\qquad \varphi(x_i\,,t)=\frac{\partial\Phi_0^{(m-1)}}{\partial t}-\sqrt{k}\,\Phi_1^{(m-1)}\,.$$

V.

Caso generale: p e $q \geq 2$. — Cominciamo col ricordare alcune identità analitiche che, almeno per certi casi particolari, sono molto note. Come si ricava subito dalla relazione

$$e^{z\cos\omega} = \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{z^n}{n!}\cos^n\omega = I_0(z) + 2\sum_{1}^{\infty}{}_m I_m(z)\cos(m\omega),$$

sostituendo, nel secondo membro, $\cos(m\omega)$ espresso per le potenze di $\cos\omega$, sussiste la relazione generica

$$(23) \qquad \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} = \sum_{0}^{\infty}{}_s (-1)^s \frac{(\nu+2s)(\nu+s-1)!}{s!} I_{\nu+2s}(z),$$

in cui ν è, naturalmente, un numero intero. Questa identità, del resto, si dimostra immediatamente per $\nu = 0$, derivando ambo i membri, e tenendo conto della relazione (a). Per ogni altro valore di ν si dimostrerà, con la stessa facilità, col metodo dell'induzione completa e con lo stesso procedimento col quale abbiamo detto che si dimostra per $\nu = 0$.

La formola (23) vale anche per ogni valore di ν, sostituendo $\Gamma(\nu+s)$ al posto di $(\nu+s-1)!$ purchè ν non sia un intero negativo, e si può trovare la dimostrazione di essa nel libro di Nielsen [*Handbuch der Theorie der Cylinderfunk*, § 33, form. (4), e § 108, form. (1)].

Ciò posto ritorniamo alla nostra questione e consideriamo l'equazione da integrare, nel caso generale di p e $q \geq 2$, sotto la forma (1). Consideriamo la regione dello spazio lineare S_{p+q} a $p+q$ dimensioni di cui (ξ_i, η_j) sono le coordinate di un punto, limitata dalla varietà conica caratteristica

$$r^2 - t^2 = 0 \quad , \quad r = \sqrt{\sum_{1}^{p}{}_i (x_i - \xi_i)^2} \quad , \quad t = \sqrt{\sum_{1}^{q}{}_j (y_j - \eta_j)^2},$$

avente il vertice nel punto (x_i, y_j) di S_{p+q}, dalla varietà cilindrica $r = \varepsilon$ e dalla porzione Σ' di una varietà a $p+q-1$ dimensioni soddisfacente alle solite proprietà generali, e nella quale regione supponiamo, e solo per fissare le idee, che sia $r^2 \leq t^2$. In questa regione, come di solito, applicheremo il teorema di reciprocità, relativo alla (1), ad ogni coppia di soluzioni di questa equazione di cui una φ sia fissa e rappresenti una soluzione regolare generica di essa, mentre l'altra soluzione della coppia sia una di quelle date dalla (5) in cui λ, oltre a soddisfare alle (10), sarà ulteriormente precisata come presto diremo. Al solito modo, facendo tendere ε a zero, e chiamando Σ ciò che diventa Σ', al limite, saremo condotti ad una serie di relazioni del tipo

$$(24) \qquad \int_C \varphi(x_i, \eta_j)\, t^{\frac{p-q}{2}-1}\, I_{\frac{p+q}{2}+\lambda-1}(t\sqrt{k})\, dC = \Phi_\lambda ,$$

dove C è la regione dello spazio lineare a q dimensioni limitata dalla varietà Σ e Φ_λ un'espressione integrale estesa a Σ in cui la funzione incognita φ compare, oltre che con i suoi proprii valori, con quelli della sua derivata conormale.

Nella (24) supporremo di dare a λ sempre valori interi soddisfacenti, s'intende, alle (10); e notiamo che, se queste condizioni sono soddisfatte per un determinato valore di λ, lo sono pure per ogni valore intero successivo. Fissato allora λ come, nei diversi casi, sarà indicato, noi prenderemo in considerazione le infinite relazioni (24) seguenti:

$$(24') \qquad \int_C \varphi(x_i, \eta_j)\, t^{\frac{p-q}{2}-1}\, I_{\frac{p+q}{2}-1+\lambda+2l}(t\sqrt{k})\, dC = \Phi_l , \qquad l = 0, 1, 2, \dots \infty .$$

Supponiamo ora che si tratti del caso più semplice in cui p e q sono entrambi dispari, e gli indici quindi delle funzioni di Bessel che compaiono nei primi membri delle relazioni precedenti sieno numeri interi. In questo caso possiamo supporre che nelle (24') sia, senz'altro, $\lambda = 0$ pel quale valore le (10) sono evidentemente soddisfatte. Dalla (23) segue subito che possiamo sempre determinare, nell'ipotesi fatta, infiniti valori numerici c_l in modo che, moltiplicando le (24') per le c_l e sommando, si abbia

$$(25) \qquad \int_C \varphi(x_i, \eta_j)\, t^{p-2}\, dC = \sum_0^\infty {}_l\, c_l\, \Phi_l .$$

Poniamo ora, per brevità,

$$\Delta_q^2 = \sum_1^q {}_j \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} ,$$

e notiamo che

$$(\Delta_q^2)^{\frac{p+q-4}{2}}\, t^{p-2} = A(p, q)\, t^{2-q} ,$$

dove

$$A(p, q) = (p-2)(p-4) \dots (4-q) \times (p+q-4)(p+q-6) \dots 4 \,.\, 2 .$$

Si ricava allora subito dalla (25),

$$(25') \qquad A(p, q) \int_C \varphi(x_i, \eta_j)\, t^{2-q}\, dC = (\Delta_q^2)^{\frac{p+q-4}{2}} \sum_0^\infty {}_l\, c_l\, \Phi_l .$$

Basta applicare, infine, un'altra volta l'operazione Δ_q^2 ai due membri dell'equazione precedente per trovare la formola definitiva

$$\text{(D)} \qquad 2(q-2)\,\mathrm{A}(p\,,q)\,\frac{\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\,\varphi(x_i\,,y_j) = -\left(\Delta_q^2\right)^{\frac{p+q-2}{2}}\sum_0^\infty{}_l\, c_l\,\Phi_l .$$

Supponiamo adesso che q sia ancora dispari, mentre p sia pari. Il procedimento innanzi indicato vale inalterato purchè nelle (24') si prenda $\lambda = 1$, e, poichè gli indici delle funzioni di Bessel, in questo caso, sono metà di numeri dispari, si tenga conto della (23) pel caso in cui ν è la metà di numeri dispari. Il caso particolare in cui $p = 2$ non fa eccezione.

Quando q è pari, applicando il metodo precedente, da un certo punto in poi, al primo membro delle equazioni che si dedurrebbero dall'equazione corrispondente alla (25), compare lo zero e non si ottengono che delle identità. Però se, pur supponendo q pari, p è dispari, si possono ottenere delle formole che risolvono il problema della integrazione operando nella regione $r^2 > t^2$, invece che nell'altra in cui $r^2 < t^2$.

Un caso di assoluta impossibilità di risolvere il problema propostoci, col metodo da noi indicato si ha quindi soltanto allorchè p e q sono contemporaneamente pari. La impossibilità però è da imputarsi solo alla natura delle soluzioni fondamentali adoperate e non al metodo. Per poter raggiungere il nostro scopo quando q è pari bisognerebbe introdurre, come soluzioni fondamentali, delle soluzioni della nostra equazione che sieno della forma

$$t^\lambda \varphi_\lambda \left[\log t + \mathrm{C}(t\,,r)\right],$$

dove $t^\lambda \varphi_\lambda$ è la soluzione generica definita dalla (5) e $\mathrm{C}(t\,,r)$ una nuova funzione di t ed r tale che il prodotto $\mathrm{C}\varphi_\lambda$ continui ad annullarsi sulla varietà $t^2 = r^2$, mentre sulla varietà $r = 0$ diventi infinita di ordine più piccolo di φ_λ stessa. La funzione C si può certamente determinare, ma non pare che si possa assegnare ad essa una espressione sufficientemente semplice.

Le difficoltà precedenti, del resto, sono quelle stesse che ha notato il Coulon nella sua tesi (pag. 97).