# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXIII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Su certe equazioni integrali del Kneser e sulla loro generalizzazione.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO [1].

In una recente Memoria [2] il prof. A. Kneser si è occupato di un tipo nuovo di equazioni integrali, che egli chiama « *belastete* ». Esse si ottengono (ed appunto di qui egli dà la denominazione) se in luogo di considerare le vibrazioni di una corda o di una membrana omogenea, si studiano le vibrazioni di una corda o di una membrana che rispettivamente sieno caricate da pesi addizionali in punti singolari e lungo curve singolari.

Ora mi propongo di mostrare in questa breve Nota, come si possano studiare queste equazioni, servendosi unicamente dei risultati del Fredholm: ritrovando così una posizione del Kneser che considera queste sue equazioni proprio come dedotte da quelle del Fredholm, sostituendo all'integrale ordinario un integrale « sopralineato ».

Col metodo che daremo si potranno non solo estendere immediatamente i risultati al caso che sulla corda o sulla membrana vi sia una distribuzione di masse su un insieme, rispettivamente di misura (esterna) lineare o superficiale nulla, ma si potranno anche trattare i casi analoghi per le equazioni del Volterra, casi che corrispondono ad un impulso (o variazione) istantaneo e finito in una legge d'ereditarietà.

1. Rimanendo, per semplicità, nel campo ad una dimensione, e supponendo che sieno in numero finito $n$ i punti « caricati » le equazioni caricate, si possono scrivere con leggera modifica:

$$\varphi(x) + \lambda \left\{ \int_0^1 \mathrm{N}(x\alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha + \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{M}_\nu\, \mathrm{N}(x\alpha_\nu)\, \varphi(\alpha_\nu) \right\} = f(x).$$

Il Kneser suppone che le quantità $\mathrm{M}_\nu$ sieno essenzialmente positive: questa è una condizione importantissima specialmente pei concetti d'ortogonalità.

Come abbiamo detto, le $\alpha_\nu$ sono in numero di $n$. Definiamo ora una funzione continua, finita e simmetrica (se si vuole) $\mathrm{H}(x\xi)$ che per $\xi$ eguale ad $\alpha_\nu$ assuma il valore $\mathrm{M}_\nu\, \mathrm{N}(x\alpha_\nu)$; inoltre definiamo un'altra funzione continua [3] $l(\xi, \varepsilon)$ nel seguente modo:

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1914.

[2] Kneser, *Belastete Integralgleichungen*, Rend. Circ. Mat. Pal., tom. XXXVII, an. 1914.

[3] Si riconosce qui agevolmente la formazione di quei « *denti* » usati nella teoria delle funzioni di linea del Volterra.

1°) negli intervalli $(\alpha_\nu - \varepsilon + \varepsilon^2 \,,\, \alpha_\nu + \varepsilon - \varepsilon^2)$, essa è costante ed eguale a $k$;

2°) negli intervalli $(\alpha_\nu - \varepsilon \,,\, \alpha_\nu - \varepsilon + \varepsilon^2)$ cresce (per comodità linearmente) da 0 a $k$;

3°) negli intervalli $(\alpha_\nu + \varepsilon - \varepsilon^2 \,,\, \alpha_\nu + \varepsilon)$ decresce (per comodità linearmente) da $k$ a 0;

4°) in tutto il rimanente campo è zero: cioè *fuori* degli intervalli $(\alpha_\nu - \varepsilon \,,\, \alpha_\nu + \varepsilon)$.

In sostanza, meccanicamente ciò equivarrebbe a supporre che la massa addizionale non fosse caricata tutta nei punti $\alpha_\nu$, ma fosse distribuita nel loro intorno.

Consideriamo allora l'equazione integrale ordinaria di Fredholm:

$$(1) \qquad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 \left\{ \mathrm{N}(xy) + \mathrm{H}(xy) \frac{l(y\,,\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)} \right\} \varphi(y)\, dy = f(x)\,,$$

ove $\sigma(\varepsilon)$ è l'area d'una qualunque di quei « denti » ora formati dalla funzione $l(x\,,\varepsilon)$.

2. È ovvio che per ogni $\varepsilon$ non superiore a certi limiti, ed in particolare per $\varepsilon$ sufficientemente piccolo, l'integrale

$$\int_0^1 \mathrm{H}(xy) \frac{l(y\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)} \varphi(y)\, dy\,,$$

si scriverà semplicemente, a causa della definizione di $l$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\alpha_\nu - \varepsilon}^{\alpha_\nu + \varepsilon} \mathrm{H}(xy) \frac{l(y\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)} \varphi(y)\, dx\,.$$

Applicando indi il teorema del valor medio (il che si può fare poichè le M e quindi le H conservano sempre lo stesso segno nell'intervallo piccolissimo considerato) a questo integrale, esso diventa:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\mathrm{H}(x\alpha_\nu')\, \varphi(\alpha_\nu') \cdot \int_{\alpha_\nu - \varepsilon}^{\alpha_\nu + \varepsilon} l(y\,,\varepsilon)\, dy}{\sigma(\varepsilon)}\,; \qquad \{\alpha_\nu - \varepsilon \leq \alpha_\nu' \leq \alpha_\nu + \varepsilon\}$$

ossia, per la continuità delle funzioni:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\mathrm{H}(x\alpha_\nu)\, \varphi(\alpha_\nu)}{\sigma(\varepsilon)} \cdot \int_{\alpha_\nu - \varepsilon}^{\alpha_\nu + \varepsilon} l(y\varepsilon)\, dy + \varpi\,,$$

ove $\varpi$ tende a zero con $\varepsilon$.

Ma, per la definizione da noi data di H, $l$ e $\sigma$, si vede che quell'integrale si può scrivere:

$$\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu N(x\alpha_\nu)\,\varphi(\alpha_\nu) + \varpi\,,$$

dunque si ha che l'equazione (1), si può anche scrivere:

$$\varphi(x) + \lambda\left\{\int_0^1 N(xy)\,\varphi(y)\,dy + \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu N(x\alpha_\nu)\,\varphi(\alpha_\nu)\right\} = f(x) - \lambda\varpi\,.$$

Epperò si vede che al tendere di $\varepsilon$ a zero, la (1) tende a ridursi proprio alle equazioni caricate o « belastete » del Kneser.

D'altra parte, se adottiamo la solita notazione del Fredholm, il determinante della (1) sarà dato da:

$$D(\lambda) = 1 + \lambda\int_0^1 M(ss)\,ds + \cdots + \frac{\lambda^p}{p!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 M\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_p \\ s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_p + \cdots$$

ove

$$M(xy) = N(xy) + H(xy)\,\frac{l(y\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)}\,.$$

Intanto si può facilmente osservare come si trasformi questo determinante quando alla M si sostituisca il suo valore; e si vede come ovviamente esso sia una funzione continua di $\varepsilon$, essendo quella serie, una serie uniformemente convergente di funzioni continue.

Lo stesso si può dire per l'altra serie $D\begin{pmatrix} x & \\ y & \lambda \end{pmatrix}$; quindi ne risulta che le equazioni del Kneser si possono trattare mediante la (1), ponendo in essa $\varepsilon = 0$.

Si ritrova così perfettamente il risultato ottenuto per altra via dal Kneser nella sua Memoria al § VI, circa l'uso dell'integrale sopralineato.

3. Naturalmente si vede che il concetto di *ortogonalità caricata* rientra in quello di ortogonalità ordinaria.

Infatti, il nucleo da noi introdotto, non è simmetrico; quindi in luogo di ortogonalità, vi sarà da attendersi una biortogonalità; e precisamente saranno biortogonali le autofunzioni $\varphi$ e $\psi$ soddisfacenti a

$$\varphi_n(x) + \lambda_n\int_0^1\left\{N(xy) + H(xy)\,\frac{l(y\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)}\right\}\varphi_n(y)\,dy = 0\,,$$

$$\psi_m(x) + \lambda_m\cdot\int_0^1\left\{N(yx) + H(yx)\,\frac{l(x\,,\,\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)}\right\}\psi_m(y)\,dy = 0\,,$$

ove $\lambda_n$ e $\lambda_m$ sono autovalori.

Osserviamo che in quest'ultima equazione si presenta il limite

$$\lim \frac{l(x\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)};$$

il numeratore per $x = \alpha_\nu$ è proprio $k$; il denominatore, che invece è l'area d'un dente per $\varepsilon$ sufficientemente piccolo, è dato da $k\varepsilon + \varpi$, quindi si vede che quel limite per $x = a_\nu$ tende all'infinito come $\frac{1}{\varepsilon}$.

Invece per $x \neq \alpha_\nu$ è ovvio che $l(x\varepsilon)$ ed $\frac{l(x\,,\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)}$ al diminuire di $\varepsilon$ tendono a diventare e a restare zero, in virtù della definizione.

Dunque la seconda delle due equazioni ora scritte, si presenta con qualche singolarità, di natura polare, se si effettua direttamente il passaggio $\varepsilon = 0$; epperò occorre passare al limite per $\varepsilon = 0$.

È facile poi vedere che scritte effettivamente le condizioni di biortogonalità delle $\varphi$ e delle $\psi$ si ritrovano proprio quelle di ortogonalità caricata.

4. Come abbiamo già detto, è possibile in un modo perfettamente analogo estendere gli stessi concetti del Kneser alle equazioni integrali di Volterra; cioè considerare le

$$\varphi(x) + \lambda \left\{ \int_0^x \mathrm{N}(xy)\, \varphi(y)\, dy + \sum_{\{0\}}^{\{x\}} \mathrm{M}_\nu\, \mathrm{N}(x\alpha_\nu)\, \varphi(\alpha_\nu) \right\} = f(x)\,,$$

ove col simbolo $\{x\}$ intendiamo la più piccola delle $\alpha_\nu$ maggiori o eguali ad $x$.

La trattazione di queste equazioni, corrispondenti ad un concetto di ereditarietà « *caricata* » si può fare nello stesso modo che per le altre, col simbolo d'integrale sopralineato del Kneser, giustificandone l'uso nella stessa maniera che per l'altro caso.

Anzi, sempre con lo stesso metodo, si potrebbero trattare le più generali equazioni (o sistemi) integro-differenziali caricate, a limiti qualunque.