ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Problema del parallelepipedo rettangolo nel caso dell'elasticità ereditaria.* Nota II della dott.ssa ANGELA MARIA MOLINARI, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE [1].

Mi propongo qui di mostrare alcune trasformazioni dei risultati ottenuti nella Nota I.

La formula integrale che dà $S(\vartheta)$

$$(1) \qquad S(\vartheta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Psi(\omega)}{a^2 - a\Psi(\omega)}\, e^{\omega\vartheta}\, d\omega$$

può trasformarsi in una serie in diverse forme secondo le forme che si hanno, o si suppongono avere, per la $\Psi(\Delta)$.

Un caso frequente è che $\Psi(\Delta)$ nell'intorno dell'infinito sia, o si supponga, sviluppabile sotto la forma

$$\Psi(\Delta) = \frac{C}{\Delta} + \frac{C_1}{\Delta^2} + \cdots + \frac{C_n}{\Delta^{n+1}} + \cdots$$

Si potrà allora sviluppare l'operatore $\dfrac{\Psi(\Delta)}{a^2 - a\Psi(\Delta)}$ in una serie

$$\frac{\Psi(\Delta)}{a^2 - a\Psi(\Delta)} = \frac{C}{a^2}\cdot\frac{1}{\Delta} + \left(\frac{C_1}{a^2} + \frac{C_2}{a^3}\right)\frac{1}{\Delta^2} + \left(\cdots\cdots\right)\frac{1}{\Delta^3} + \cdots$$

convergente uniformemente nella zona esterna ad un cerchio di raggio sufficientemente grande.

Se ne deduce, calcolando la funzione generatrice termine a termine, ciò che in tal caso è lecito, e tenendo conto che la funzione generatrice di $\dfrac{1}{\Delta^{n+1}}$ è $\dfrac{\vartheta^n}{n!}$ (per $\vartheta > 0$), la seguente serie per $S(\vartheta)$:

$$S(\vartheta) = \frac{C}{a^2} + \left(\frac{C_1}{a^2} + \frac{C_2}{a^3}\right)\frac{\vartheta}{1!} + \cdots$$

All'atto pratico, considerando che tutti i valori numerici della formula hanno origine sperimentale, lo sviluppo si arresta a un numero limitato di termini, i coefficienti dei successivi risultando sperimentalmente inapprezza-

[1] Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1914.

bili. La formula è particolarmente utile per discutere l'andamento iniziale di $S(\vartheta)$.

Senza alcuna difficoltà si può passare a un caso più generale, in cui la $\Psi(\Delta)$ sia meglio rappresentabile con una serie che contenga esponenti non interi e figurino quindi nello sviluppo termini della forma $\frac{b_r}{\Delta^r}$ dove r è un numero reale positivo qualunque. Un siffatto termine dà luogo [1] nell'espressione di $S(\vartheta)$ a un termine corrispondente

$$b_r \frac{\vartheta^{r-1}}{\Gamma(r)},$$

e la trattazione si compie egualmente.

Un altro metodo di sviluppo è il seguente. Noi abbiamo formalmente

$$\frac{\Psi(\Delta)}{a^2 - a\Psi(\Delta)} = \frac{\Psi(\Delta)}{a} \left\{ \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\Psi(\Delta) + \frac{1}{a^3}\Psi^2(\Delta) + \cdots \right\},$$

ora questo, quando Δ è sostituita da una variabile complessa, soddisfa ad analoghe condizioni di convergenza uniforme come lo sviluppo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\Psi(\Delta) + \frac{1}{a^3}\Psi^2(\Delta) + \cdots,$$

ma in un campo convenientemente modificato. Segue che

$$\frac{\Psi(\Delta)}{a^2 - a\Psi(\Delta)} V(t) = \frac{1}{a^2}\Psi(\Delta)\, V(t) + \frac{1}{a^3}\Psi^2(\Delta)\, V(t) + \cdots. \tag{2}$$

La validità dello sviluppo si verifica applicando, a primo e secondo membro (a sinistra e senza commutare), l'operatore $[a^2 - a\Psi(\Delta)]$; nel secondo membro esso è applicabile termine a termine, sempre che $V(t)$ soddisfi alle ordinarie condizioni che, per una funzione di origine fisica, si suppongono soddisfatte. Ora, se si indica $\psi(\vartheta)$ la funzione generatrice di $\Psi(\Delta)$, si ha per definizione

$$\Psi(\Delta)\, V(t) = \int_0^\infty \psi(\vartheta)\, V(t-\vartheta)\, d\vartheta ;$$

similmente indicando con

$$\psi_2(t) = \Psi(\Delta)\, \psi(t) = \int_0^\infty \psi(\vartheta)\, \psi(t-\vartheta)\, d\vartheta$$

[1] Cfr. Nota citata, *Sul calcolo* ecc. art. 36.

la funzione generatrice di $\Psi^2(\triangle)$, cioè $\Psi(\triangle)\,\Psi(\triangle)$, avremo

$$\Psi^2(\triangle)\,\mathrm{V}(t)=\int_0^\infty \psi_2(\vartheta)\,\mathrm{V}(t-\vartheta)\,d\vartheta\,,$$

e così di seguito. Essendo quindi $\psi_2, \psi_3, \ldots$ le successive funzioni iterate di ψ ottenute con questo metodo, cioè con successive applicazioni dell'operazione $\Psi(\triangle)$, la (2) può scriversi

$$(3)\qquad \frac{\Psi(\triangle)}{a^2-a\Psi(\triangle)}\,\mathrm{V}(t)=$$

$$=\int_0^\infty \left\{\frac{1}{a^2}\,\psi(\vartheta)+\frac{1}{a^3}\,\psi_2(\vartheta)+\frac{1}{a^4}\,\psi_3(\vartheta)+\cdots\right\}\mathrm{V}(t-\vartheta)\,d\vartheta\,,$$

donde confrontando colla formula (3) della Nota I, ricaviamo che $\mathrm{S}(\vartheta)$ ammette anche lo sviluppo

$$\mathrm{S}(\vartheta)=\frac{1}{a^2}\,\psi(\vartheta)+\frac{1}{a^3}\,\psi_2(\vartheta)+\frac{1}{a^4}\,\psi_3(\vartheta)+\cdots$$

È notevole come alla stessa formula si pervenga per altra via, e sotto ipotesi lievemente più restrittive, anche col metodo delle funzioni iterate del Volterra. Indichiamo infatti con $\mathrm{W}(t)$ il valore, da cercare, del primo membro della (2), cioè scriviamo

$$\mathrm{W}(t)=\frac{\Psi(\triangle)}{a^2-a\Psi(\triangle)}\,\mathrm{V}(t)\,.$$

Operando membro a membro con $a^2-a\Psi(\triangle)$, il che è lecito, si ricava

$$a^2\mathrm{W}(t)-a\Psi(\triangle)\,\mathrm{W}(t)=\Psi(\triangle)\,\mathrm{V}(t)\,,$$

ovvero, sostituendo al simbolo $\Psi(\triangle)$ l'espressione esplicita dell'operazione che esso rappresenta,

$$a^2\mathrm{W}(t)-a\int_{-\infty}^t \psi(t-\tau)\,\mathrm{W}(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^t \psi(t-\tau)\,\mathrm{V}(\tau)\,d\tau\,.$$

Il secondo membro è funzione conosciuta; indichiamola con $\mathrm{U}(t)$; avremo allora

$$a^2\,\mathrm{W}(t)-a\int_{-\infty}^t \psi(t-\tau)\,\mathrm{W}(\tau)\,d\tau=\mathrm{U}(t)\,,$$

e questa è un'equazione integrale a cui deve soddisfare l'incognita $\mathrm{W}(t)$.

I teoremi del Volterra [1] permettono di risolverla, almeno nel caso in cui ψ sia funzione continua, limitata e si annulli al di fuori di un intervallo finito [condizioni queste che con una dimostrazione opportunamente generalizzata dei teoremi medesimi, potrebbero facilmente rimuoversi]. In tal caso, risolvendo rispetto a $W(t)$, dopo aver diviso per a^2, si ricava

$$W(t) = \frac{1}{a^2} U(t) - \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{t} U(\tau)\, \varphi(t-\tau)\, d\tau \,, \tag{4}$$

dove

$$-\varphi = \frac{1}{a^2}\psi + \frac{1}{a^3}\psi_2 + \frac{1}{a^4}\psi_3 + \cdots,$$

essendo $\psi_2, \psi_3, \ldots$ le successive *funzioni iterate* della ψ ottenute con le formule del Volterra. È facile verificare che questa soluzione coincide con la (3).

Fisiologia vegetale. — *Sull'azione dell' idrogenione e di alcuni anioni sul periodo germinativo dell'Avena sativa.* Nota del dott. F. Plate, presentata dal Socio prof. R. Pirotta [2].

In diverse Note preventive ho comunicato i risultati di una prima serie di esperienze eseguite collo scopo di studiare l'azione dei singoli nitrati solubili, e più propriamente dei cationi, sul periodo germinativo dell'*Avena sativa*. Ho creduto opportuno di seguire in questo mio primo studio biologico dei cationi, per quanto fosse possibile, il sistema periodico degli elementi.

Era però interessante di estendere le ricerche anche all'azione dell' idrogenione e di alcuni anioni, e precisamente di quelli che più di frequente trovansi anche nel corpo delle piante, quali il clorione (Cl'), nitrione (NO_3'), SO_4''-ione e PO_4'''-ione. Per conoscere meglio l'azione degli anioni, era perciò necessario di lasciare lo stesso catione facendo variare solo l'anione; e credetti perciò opportuno di adoperare addirittura gli acidi rispettivi.

Il metodo sperimentale seguìto in questa serie di ricerche fu il medesimo, già adottato per i nitrati, e che mi diede sempre i migliori risultati. Adoperai le solite soluzioni normali, cioè $^N/_{50}$, $^N/_{100}$, $^N/_{200}$, $^N/_{400}$, $^N/_{800}$, $^N/_{1600}$, e $^N/_{3200}$, previamente titolate. Le piantine di *Avena sativa* furono immerse nelle soluzioni il 5° giorno, quando il germoglio aveva raggiunto in media un accrescimento di cm. 8,5, e la radice un accrescimento di cm. 9,5 circa.

Per ogni acido sono qui raggruppati i risultati medii ottenuti nell'accrescimento:

[1] Cfr. V. Volterra, *Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti* (Annali di Matematica, 1897, ser. II, vol. 25, pp. 139-178.

[2] Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1914.