ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

***pervenute all'Accademia durante le ferie del* 1914.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sulle deformate rigate del paraboloide iperbolico.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI [1].

1. Si sa che la ricerca delle superficie *non rigate* applicabili sul paraboloide iperbolico dipende dalla integrazione della equazione a derivate parziali

$$(a) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{2} \operatorname{senh} 2\theta ,$$

ovvero dell'altra

$$(b) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{2} \cosh 2\theta .$$

In ambedue i casi le linee $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ sono le asintotiche della superficie deformata. Ma i due casi si distinguono per ciò: che nel primo, il *sistema coniugato permanente* è reale; nel secondo, invece, immaginario [2].

Scopo della presente Nota è di completare la trattazione coll'esame del caso intermedio delle deformate *rigate*, ove le linee del sistema coniugato permanente sono reali e coincidenti nelle generatrici. Si vedrà che la

[1] Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1914.

[2] Ved. le mie Memorie sulla deformazione dei paraboloidi nei tomi IX e XII degli Annali di matematica, ser. 3ª, 1903, 1906.

ricerca di queste deformate rigate dipende, invece che dalle (a) (b), dalla *equazione di Liouville*

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = e^{\theta},$$

il cui integrale generale è ben noto. Viceversa, ad ogni soluzione θ della equazione di Liouville corrispondono ∞^3 deformate rigate del medesimo paraboloide, le quali hanno a comune l'equazione di Moutard per le deformazioni infinitesime; che ha la forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} = e^{\theta} . \psi .$$

Le formole che collegano le deformate rigate del paraboloide alle soluzioni della equazione di Liouville si applicano facilmente alla ricerca delle corrispondenti ***trasformazioni*** B_k e completano così le formole trovate nella Memoria citata (del tomo XII, Annali) per il caso generale.

2. Riferiamo il paraboloide iperbolico

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 2Z$$

ad un sistema di coordinate curvilinee x_0, ξ_0, ponendo

$$\text{(1)} \qquad X = p x_0 \quad , \quad Y = q \xi_0 \quad , \quad Z = \frac{p x_0^2 - q \xi_0^2}{2},$$

talchè, pel ds^2, abbiamo

$$\text{(2)} \qquad ds^2 = p^2(1 + x_0^2)\, dx_0^2 - 2pq\, x_0\, \xi_0\, dx_0\, d\xi_0 + q^2(1 + \xi_0^2)\, d\xi_0^2 ,$$

e, pei valori dei corrispondenti simboli di Christoffel,

$$\left\{ \begin{aligned} &\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{x_0}{1 + x_0^2 + \xi_0^2} \quad , \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{q}{p} \frac{x_0}{1 + x_0^2 + \xi_0^2} \\ &\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\frac{p}{q} \frac{\xi_0}{1 + x_0^2 + \xi_0^2} \quad , \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\xi_0}{1 + x_0^2 + \xi_0^2} . \end{aligned} \right.$$

Ne segue che la curvatura K è data da

$$K = -\frac{1}{pq(1 + x_0^2 + \xi_0^2)^2} ;$$

onde, ponendo, come al solito, $K = -\frac{1}{\varrho^2}$, si avrà

$$\varrho = \sqrt{pq}\,(1 + x_0^2 + \xi_0^2) .$$

Abbiasi ora una qualunque superficie S applicabile sul paraboloide [di elemento lineare (2)], e siano (u, v) le linee asintotiche di S, per i cui parametri u, v intendiamo espresse x_0, ξ_0. Sussistono allora le equazioni caratteristiche di Darboux per le asintotiche virtuali [1]:

$$(D)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v} = \left[\dfrac{\partial \log \varrho}{\partial x_0} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right]\dfrac{\partial x_0}{\partial u}\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + \\ \qquad + \left[\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \varrho}{\partial \xi_0} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]\left(\dfrac{\partial x_0}{\partial u}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial v} + \dfrac{\partial x_0}{\partial v}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial u}\right) - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial u}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial u\,\partial v} = -\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial x_0}{\partial u}\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + \\ \qquad + \left[\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \varrho}{\partial u} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right]\left(\dfrac{\partial x_0}{\partial u}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial v} + \dfrac{\partial x_0}{\partial v}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial u}\right) + \\ \qquad + \left[\dfrac{\partial \log \varrho}{\partial \xi_0} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right]\dfrac{\partial \xi_0}{\partial u}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial v}. \end{cases}$$

Viceversa, se le due funzioni $x_0 = x_0(u, v)$, $\xi_0 = \xi_0(u, v)$ soddisfano le (D) e sono indipendenti, le linee (u, v) tracciano sul paraboloide un sistema di asintotiche virtuali, cui corrisponde un'unica deformata.

Introducendo nelle (D) pei simboli di Christoffel e per ϱ i valori sopra calcolati, queste diventano

$$(3)\quad \begin{cases} p\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{x_0}{1+x_0^2+\xi_0^2}\left(p\dfrac{\partial x_0}{\partial u}\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + q\dfrac{\partial \xi_0}{\partial u}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial v}\right) + \\ \qquad + \dfrac{p\xi_0}{1+x_0^2+\xi_0^2}\left(\dfrac{\partial x_0}{\partial u}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial v} + \dfrac{\partial x_0}{\partial v}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial u}\right) \\ q\dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\xi_0}{1+x_0^2+\xi_0^2}\left(p\dfrac{\partial x_0}{\partial u}\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + q\dfrac{\partial \xi_0}{\partial u}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial v}\right) + \\ \qquad + \dfrac{q x_0}{1+x_0^2+\xi_0^2}\left(\dfrac{\partial x_0}{\partial u}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial v} + \dfrac{\partial x_0}{\partial v}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial u}\right). \end{cases}$$

Supponiamo ora, di più, che la S sia rigata, sicchè le sue asintotiche di un sistema saranno rettilinee; poniamo le $v = \text{cost}$, ed esse corrisponderanno alle generatrici di un sistema sul paraboloide, diciamo, p. es., alle

$$\sqrt{p}\,x_0 + \sqrt{q}\,\xi_0 = \text{cost}.$$

In tal caso dovrà essere $\sqrt{p}\,x_0 + \sqrt{q}\,\xi_0$ funzione della sola v, cioè

$$(4)\qquad \sqrt{p}\,\frac{\partial x_0}{\partial u} + \sqrt{q}\,\frac{\partial \xi_0}{\partial u} = 0;$$

[1] Ved. la traduzione tedesca delle mie *Lezioni* (2ª ediz. pag. 214).

questa è un'equazione del 1° ordine da aggregarsi alle (3), che possono ora scriversi

$$\begin{cases} \sqrt{p}\,\dfrac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u}\log(1+x_0^2+\xi_0^2)\cdot\left(\sqrt{p}\,\dfrac{\partial x_0}{\partial v}-\sqrt{q}\,\dfrac{\partial \xi_0}{\partial v}\right) \\ \sqrt{q}\,\dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial u\,\partial v} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u}\log(1+x_0^2+\xi_0^2)\cdot\left(\sqrt{p}\,\dfrac{\partial x_0}{\partial v}-\sqrt{q}\,\dfrac{\partial \xi_0}{\partial v}\right) \end{cases}$$

e rientrano, per la (4), l'una nell'altra, onde basta surrogarle colla loro differenza:

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\sqrt{p}\,\frac{\partial x_0}{\partial v}-\sqrt{q}\,\frac{\partial \xi_0}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\log(1+x_0^2+\xi_0^2)\ \text{(1)}. \tag{5}$$

Se introduciamo le due nuove funzioni incognite

$$\eta_0=\sqrt{p}\,\frac{\partial x_0}{\partial v}\quad,\quad \zeta_0=\sqrt{q}\,\frac{\partial \xi_0}{\partial v},$$

le (4), (5) diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{q}\,\dfrac{\partial \xi_0}{\partial u}}{\zeta_0+\eta_0} = \dfrac{-\sqrt{p}\,\dfrac{\partial x_0}{\partial u}}{\zeta_0+\eta_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\log(\zeta_0-\eta_0) = \dfrac{\partial}{\partial u}\log(1+x_0^2+\xi_0^2). \end{cases} \tag{6}$$

L'ultima, integrata, dà

$$\zeta_0-\eta_0=V(1+x_0^2+\xi_0^2), \tag{7}$$

dove V indica una funzione della sola v; ed è anche $\zeta_0+\eta_0$ funzione della sola v, poichè

$$\frac{\partial}{\partial u}(\zeta_0+\eta_0)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{p}\,\frac{\partial x_0}{\partial u}+\sqrt{q}\,\frac{\partial \xi_0}{\partial u}\right)=0.$$

Disponendo del parametro v, possiamo rendere, nella (7),

$$V=\frac{1}{\zeta_0+\eta_0}$$

e così x_0,ξ_0,η_0,ζ_0 risultano legate dalla relazione quadratica

$$x_0^2+\xi_0^2+\eta_0^2-\zeta_0^2=-1. \tag{8}$$

(1) Si avverta che non può essere

$$\sqrt{q}\,\frac{\partial x_0}{\partial v}-\sqrt{q}\,\frac{\partial \xi_0}{\partial v}=0\,;$$

altrimenti anche le generatrici $\sqrt{q}\,x_0-\sqrt{q}\,\xi_0=\text{cost}$ del paraboloide sarebbero rimaste rettilinee, e la S coinciderebbe col paraboloide stesso, caso che naturalmente escludiamo.

Introduciamo in fine una quinta funzione incognita θ, ponendo, secondo la (6_1),

$$\frac{\sqrt{q}\,\frac{\partial \xi_0}{\partial u}}{\zeta_0+\eta_0}=\frac{-\sqrt{p}\,\frac{\partial x_0}{\partial u}}{\zeta_0+\eta_0}=e^\theta \text{ (1)};$$

avremo così le formole

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x_0}{\partial u}=-\frac{e^\theta}{\sqrt{p}}(\eta_0+\zeta_0)\quad,\quad \frac{\partial \xi_0}{\partial u}=\frac{e^\theta}{\sqrt{q}}(\eta_0+\zeta_0)\\ &\frac{\partial x_0}{\partial v}=\frac{\eta_0}{\sqrt{p}}\quad,\quad \frac{\partial \xi_0}{\partial v}=\frac{\zeta_0}{\sqrt{q}}\\ &\frac{\partial \eta_0}{\partial u}+\frac{\partial \zeta_0}{\partial u}=0\,. \end{aligned}\right.$$

Ma dalla (8), derivata rapporto ad u, abbiamo

$$x_0\frac{\partial x_0}{\partial u}+\xi_0\frac{\partial \xi_0}{\partial u}=\zeta_0\frac{\partial \zeta_0}{\partial u}-\eta_0\frac{\partial \eta_0}{\partial u}\,.$$

e, combinando colle precedenti, risulta

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial u}=e^\theta\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-\frac{\xi_0}{\sqrt{q}}\right)\quad,\quad \frac{\partial \zeta_0}{\partial u}=-e^\theta\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-\frac{\xi_0}{\sqrt{q}}\right).$$

Dopo ciò, le condizioni d'integrabilità per le (9), dànno concordemente,

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial v}+\frac{\partial \zeta_0}{\partial v}=-\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-\frac{\xi_0}{\sqrt{q}}\right)-\frac{\partial \theta}{\partial v}(\eta_0+\zeta_0)\,;$$

e, derivando la (8) rapporto a v,

$$-\eta_0\frac{\partial \eta_0}{\partial v}+\zeta_0\frac{\partial \zeta_0}{\partial v}=\frac{x_0\,\eta_0}{\sqrt{p}}+\frac{\xi_0\,\zeta_0}{\sqrt{q}}:$$

onde risultano le nuove formole

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \eta_0}{\partial v}=-\frac{\partial \theta}{\partial v}\zeta_0-\frac{x_0}{\sqrt{p}}\\ &\frac{\partial \zeta_0}{\partial v}=-\frac{\partial \theta}{\partial v}\eta_0+\frac{\xi_0}{\sqrt{q}}\,. \end{aligned}\right.$$

(1) Ciò suppone positivo il valore comune dei due primi rapporti; in caso contrario, si ponga $=-e^\theta$ e si proceda nel medesimo modo.

Riassumendo, abbiamo per le quattro funzioni incognite $x_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ il seguente sistema differenziale lineare ed omogeneo:

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x_0}{\partial u} = -\frac{e^\theta}{\sqrt{p}}(\eta_0+\zeta_0), \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial u} = \frac{e^\theta}{\sqrt{q}}(\eta_0+\zeta_0),\\
&\frac{\partial \eta_0}{\partial u} = e^\theta\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-\frac{\xi_0}{\sqrt{q}}\right), \quad \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} = -e^\theta\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-\frac{\xi_0}{\sqrt{q}}\right),\\
&\frac{\partial x_0}{\partial v} = \frac{\eta_0}{\sqrt{p}}, \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial v} = \frac{\zeta_0}{\sqrt{q}}, \quad \frac{\partial \eta_0}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}\zeta_0 - \frac{x_0}{\sqrt{p}},\\
&\frac{\partial \zeta_0}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}\eta_0 + \frac{\xi_0}{\sqrt{q}}.
\end{aligned}
\right.
$$

In fine, formando le condizioni d'integrabilità anche per η_0, ζ_0, troviamo l'unica equazione per θ

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right).e^\theta,$$

che ha appunto l'annunciata forma di Liouville. Per semplicità, noi sostituiamo al paraboloide un paraboloide simile, ponendo fra i parametri p, q la relazione

$$(11)\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,$$

talchè l'equazione di Liouville assume la forma normale

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = e^\theta.$$

3. Inversamente prendiamo per θ una qualunque soluzione della (I). Il sistema lineare omogeneo nelle quattro funzioni incognite x, ξ, η, ζ di u, v:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{e^\theta}{\sqrt{p}}(\eta+\zeta), \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{e^\theta}{\sqrt{q}}(\eta+\zeta),\\
&\frac{\partial \eta}{\partial u} = e^\theta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{\xi}{\sqrt{q}}\right), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = -e^\theta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{\xi}{\sqrt{q}}\right),\\
&\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\eta}{\sqrt{p}}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\zeta}{\sqrt{q}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}\zeta - \frac{x}{\sqrt{p}},\\
&\frac{\partial \zeta}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}\eta + \frac{\xi}{\sqrt{q}},
\end{aligned}
$$

risulta illimitatamente integrabile e, per fissare una quaderna (x, ξ, η, ζ) di soluzioni, basta prescrivere ad arbitrio, per un sistema iniziale $(u_0 v_0)$ di valori delle variabili, i valori di x, ξ, η, ζ.

D'altra parte, il sistema (A) possiede, come subito si verifica, l'integrale quadratico

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = \text{cost}, \tag{12}$$

ed alla costante del secondo membro si può dare, disponendo dei valori iniziali, un valore arbitrario. Ad ogni quaderna di soluzioni $(x_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ per la quale la detta costante abbia il valore -1, corrisponderà, per quanto si è visto, una, ed una sola deformata rigata del paraboloide iperbolico. E poichè in una tale quaderna $(x_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ restano ancora arbitrarie tre costanti d'integrazione, concludiamo:

Ad ogni soluzione θ della equazione (I) *di Liouville corrisponde una tripla infinità di deformate rigate del paraboloide iperbolico; ad ogni deformata rigata corrisponde una sola soluzione θ dell'equazione di Liouville.*

4. La ricerca delle formole effettive per le deformate rigate del paraboloide corrispondenti ad una data soluzione θ della (I) può spingersi più oltre sino ad ottenere queste formole espresse per quadrature, fondandosi sulle considerazioni seguenti:

Dall'essere il sistema (A) lineare omogeneo, coll'integrale quadratico (12), risulta che, indicando con (x, ξ, η, ζ) e $(x', \xi', \eta', \zeta')$ due quaderne qualunque di soluzioni, distinte ovvero coincidenti, sarà costante l'espressione (¹)

$$\Omega = xx' + \xi\xi' + \eta\eta' - \zeta\zeta'.$$

Noi diremo che le due quaderne sono *armoniche* se si annulla l'espressione Ω. Si osservi che, se si interpretano x, ξ, η, ζ quali coordinate omogenee di un punto nello spazio, ciascuna quaderna di soluzioni (x, ξ, η, ζ) fissa, per ogni sistema di valori di u, v, un punto nello spazio, onde si otterranno due quaderne armoniche di soluzioni

$$(x, \xi, \eta, \zeta), \ (x', \xi', \eta', \zeta'),$$

scegliendone i valori iniziali per modo che i due punti rappresentativi corrispondenti siano *coniugati armonici* rispetto alla quadrica (Q) di equazione

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0. \tag{Q}$$

(¹) Basta osservare che si ha pure la soluzione

$$(ax + bx', \ a\xi + b\xi', \ a\eta + b\eta', \ a\zeta + b\zeta'),$$

con a, b costanti arbitrarie.

È anche da osservare che questa quadrica è a punti ellittici; ed un punto (x, ξ, η, ζ), che non giaccia su (Q), sarà esterno od interno, secondo che la costante del secondo membro in (12) è positiva o negativa. Disponendo del fattore costante arbitrario in x, ξ, η, ζ, noi intenderemo di *normalizzare* queste coordinate col rendere

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1 \quad \text{nei punti esterni,}$$
$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1 \quad \text{nei punti interni.}$$

Ciò posto, consideriamo un qualunque tetraedro $P_0 P_1 P_2 P_3$ autoconiugato rispetto alla quadrica (Q), onde [essendo (Q) a punti ellittici] uno dei quattro vertici, poniamo P_0, sarà interno a (Q); gli altri tre, P_1, P_2, P_3, esterni. Ed ora, corrispondentemente ai quattro vertici P_r, prendiamo quattro quaderne

$$(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r) \qquad r = 0, 1, 2, 3$$

di soluzioni normalizzate delle (A), che si riducano rispettivamente, per $u = u_0$, $v = v_0$, alle coordinate dei quattro vertici. Così avremo quattro quaderne di soluzioni, due a due armoniche, che diremo formare un *tetraedro coniugato* di soluzioni. Ne consegue che il determinante

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} x_0\sqrt{-1}, & \xi_0\sqrt{-1}, & \eta_0\sqrt{-1}, & \zeta_0 \\ x_1, & \xi_1, & \eta_1, & -\zeta_1\sqrt{-1} \\ x_2, & \xi_2, & \eta_2, & -\zeta_2\sqrt{-1} \\ x_3, & \xi_3, & \eta_3, & -\zeta_3\sqrt{-1} \end{vmatrix}$$

sarà ortogonale per linee, indi anche per colonne, ed in particolare sussisteranno le formole

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1 + x_0^2 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 &= 1 + \xi_0^2 \\ x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 &= x_0\xi_0 . \end{aligned} \right.$$

5. Corrispondentemente al tetraedro coniugato

$$(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r) \qquad r = 0, 1, 2, 3$$

di soluzioni delle (A), consideriamo le tre espressioni differenziali

$$p x_i\, dx_0 - q \xi_i\, d\xi_0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

che risultano differenziali esatti. E invero abbiamo, per le (A),

$$p x_i\, dx_0 - q \xi_i\, d\xi_0 = - e^\theta (\eta_0 + \zeta_0)(\sqrt{p}\, x_i + \sqrt{q}\, \xi_i)\, du + $$
$$+ (\sqrt{p}\, \eta_0 x_i - \sqrt{q}\, \zeta_0 \xi_i)\, dv ;$$

e si ha identicamente, per le (A) stesse,

$$\frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{p}\, \eta_0 x_0 - \sqrt{q}\, \zeta_0 \xi_i) = - \frac{\partial}{\partial v} [e^\theta (\eta_0 + \zeta_0)(\sqrt{p}\, x_i + \sqrt{q}\, \xi_i)] =$$
$$= e^\theta \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{\xi_0}{\sqrt{q}} \right) (\sqrt{p}\, x_i + \sqrt{q}\, \xi_i) - e^\theta (\eta_0 + \zeta_0)(\eta_i + \zeta_i) .$$

Se indichiamo con y_1, y_2, y_3 le rispettive funzioni di u, v, di cui le tre dette espressioni sono i differenziali esatti, abbiamo

$$(15) \qquad dy_i = p x_i\, dx_0 - q\, \xi_i\, d\xi_0 \qquad (i = 1, 2, 3) ;$$

ovvero, esprimendo per u, v,

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y_i}{\partial u} = - e^\theta (\eta_0 + \zeta_0)(\sqrt{p}\, x_i + \sqrt{q}\, \xi_i) \\ \dfrac{\partial y_i}{\partial v} = \sqrt{p}\, \eta_0\, x_i - \sqrt{q}\, \zeta_0\, \xi_i , \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

formole che definiscono y_1, y_2, y_3 per quadrature, a meno di tre rispettive costanti additive. Risulta inoltre, dal calcolo sopra eseguito, la formola

$$(17) \qquad \frac{\partial^2 y_i}{\partial u\, \partial v} = e^\theta \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{\xi_0}{\sqrt{q}} \right) (\sqrt{p}\, x_i + \sqrt{q}\, \xi_i) - e^\theta (\eta_0 + \zeta_0)(\eta_i + \zeta_i) .$$

Ed ora interpretiamo y_1, y_2, y_3 quali coordinate cartesiane ortogonali di un punto nello spazio. Questo punto $P \equiv (y_1, y_2, y_3)$ descrive, al variare di u, v, una superficie S, il cui ds^2 calcolato dalla (15), con riguardo alle (14), è dato da

$$ds^2 = p^2 (1 + x_0^2)\, dx_0^2 - 2pq\, x_0\, \xi_0\, dx_0\, d\xi_0 + q^2 (1 + \xi_0^2)\, d\xi_0^2 ,$$

cioè combina per, la (2), col ds^2 del paraboloide iperbolico. Ma siccome dalle (A) segue

$$\frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{p}\, x_r + \sqrt{q}\, \xi_r) = 0 \qquad (r = 0, 1, 2, 3),$$

dalle (16_1) vediamo che, sulla S, ciascuna linea $v = \text{cost}$ ha costanti i coseni di direzione della tangente, ed è per ciò una linea retta cui corrisponde sul paraboloide una generatrice

$$\sqrt{p}\, x_0 + \sqrt{q}\, \xi_0 = \text{cost} ;$$

dunque: *La superficie* S, *definita per quadrature dalle* (16), *è una deformata rigata del paraboloide, le asintotiche rettilinee* $v = \text{cost}$ *corrispondendo alle generatrici del primo sistema* $\sqrt{p}\, x_0 + \sqrt{q}\, \xi_0 = \text{cost}$.

6. Confermiamo quest'ultimo risultato e in pari tempo proviamo che le $u = \text{cost}$ sono, sulla S, le seconde asintotiche (curvilinee), come segue:

I coseni di direzione, che diciamo Y_1, Y_2, Y_3, della normale alla S, sono dati, per le (16), dalle formole

$$Y_i = \frac{\eta_0 \zeta_i - \zeta_0 \eta_i}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} = \frac{\eta_0 \zeta_i - \zeta_0 \eta_i}{\sqrt{1 + x_0^2 + \xi_0^2}} ;$$

e se li normalizziamo, come nelle formole di Lelieuvre (*Lezioni*, vol. I, § 77), col moltiplicarli per

$$\sqrt{\varrho} = \sqrt[4]{pq} \cdot \sqrt{1 + x_0^2 + \xi_0^2} ,$$

essi risultano proporzionali, pel fattore costante $\sqrt[4]{pq}$, ai tre binomii

$$\alpha_i = \eta_0 \zeta_i - \zeta_0 \eta_i . \tag{18}$$

Dalle (A) deduciamo, per le derivate delle α_i, le formole

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} &= e^\theta \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{\xi_0}{\sqrt{q}}\right)(\eta_i + \zeta_i) - e^\theta (\eta_0 + \zeta_0)\left(\frac{x_i}{\sqrt{p}} - \frac{\xi_i}{\sqrt{q}}\right) \\ \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} &= \frac{1}{\sqrt{p}} (\zeta_0 x_i - x_0 \xi_i) + \frac{1}{\sqrt{q}} (\eta_0 \xi_i - \xi_0 \eta_i), \end{aligned}\right. \tag{19}$$

e di qui le identità

$$\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \frac{\partial y_i}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} \frac{\partial y_i}{\partial v} = 0 ,$$

le quali provano appunto che sulla S le linee (u, v) sono le asintotiche.

Se calcoliamo poi dall'una o dall'altra delle (19) la derivata seconda mista $\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial u\, \partial v}$, troviamo semplicemente

$$\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial u\, \partial v} = e^\theta \cdot \alpha_i .$$

Si vede dunque che, per tutte le deformate rigate del paraboloide, nell'equazione di Moutard per le deformazioni infinitesime (*Lezioni*, vol. II, § 226):

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = M \Theta ,$$

il coefficiente $M = e^\theta$ soddisfa alla equazione di Liouville

$$\frac{\partial^2 \log M}{\partial u\, \partial v} = M .$$

Ne segue che le ∞^3 deformate rigate corrispondenti ad una stessa θ hanno a comune l'equazione per le deformazioni infinitesime.

7. Colle formole attuali passiamo ora ad esprimere le trasformazioni B_k della teoria generale (*Lezioni*, vol. III, cap. I) per le superficie rigate applicabili sul paraboloide. Possiamo limitarci a considerare il caso che il parametro k nel paraboloide omofocale

$$\frac{X^2}{p-k} - \frac{Y^2}{q+k} = 2Z - k$$

sia positivo, compreso fra $(0, p)$, poichè l'altro caso di k giacente nell'intervallo $(-q, 0)$ si ottiene scambiando p con q.

È chiaro che le indicate trasformazioni B_k dovranno corrispondere a formole di trasformazione per le soluzioni della equazione di Liouville. Queste si ottengono semplicemente come segue: Indicando con c una costante arbitraria (non nulla), si consideri nella coppia (θ, θ') di funzioni incognite di u, v il sistema di equazioni

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\theta'-\theta)}{\partial u} &= 2c\, e^{\frac{\theta'+\theta}{2}} \\ \frac{\partial(\theta'+\theta)}{\partial v} &= \frac{2}{c} \operatorname{senh} \frac{\theta'-\theta}{2}, \end{aligned} \right.$$

dalle quali, derivando la prima rapporto a v, la seconda rapporto ad u, e sottraendo, segue

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = e^\theta;$$

e sommando, invece,

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial u\, \partial v} = e^{\theta'}.$$

Le formole (II) legano adunque le soluzioni θ, θ' della (I) per modo che, fissata θ, il sistema (II) per θ' è completamente integrabile, e la sua soluzione generale θ', contenente, oltre c, una seconda costante arbitraria, soddisfa ancora la (I).

Essendo ora θ, θ' una tale coppia di soluzioni della (I), legate dalle (II), abbiasi in corrispondenza alla prima soluzione θ una deformata rigata S del paraboloide data dalle formole (16) del n. 5, mediante un tetraedro coniugato

$$(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r) \qquad (r = 0, 1, 2, 3)$$

di soluzioni del sistema (A).

Ponendo, per brevità,

$$\omega = \frac{\theta'-\theta}{2},$$

è facile verificare che le seguenti formole di sostituzione lineare

$$
(21)\quad \begin{cases}
x' = \dfrac{1}{\sqrt{4c^2 + p(1-c^2)^2}} \left\{ (1-c^2)\sqrt{p}\, x + 2c(\eta \cosh\omega - \zeta \operatorname{senh}\omega) \right\} \\[2ex]
\xi' = \dfrac{1}{\sqrt{4c^2 + p(1-c^2)^2}} \left\{ (1+c^2)\sqrt{p}\, \xi - 2c \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} (\eta \operatorname{senh}\omega - \zeta \cosh\omega) \right\} \\[2ex]
\eta' = \dfrac{1}{\sqrt{4c^2 + p(1-c^2)^2}} \Big\{ -2c \cosh\omega\, x - 2c \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \operatorname{senh}\omega\, \xi + \\
\qquad + (\cosh 2\omega - c^2)\sqrt{p}\, \eta - \operatorname{senh} 2\omega \sqrt{p}\, \zeta \Big\} \\[2ex]
\zeta' = \dfrac{1}{\sqrt{4c^2 + p(1-c^2)^2}} \Big\{ 2c \operatorname{senh}\omega\, x + 2c \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \cosh\omega\, \xi - \\
\qquad - \operatorname{senh} 2\omega \sqrt{p}\, \eta + (\cosh 2\omega + c^2)\sqrt{p}\, \zeta \Big\}
\end{cases}
$$

conducono da ogni quaderna (x, ξ, η, ζ) di soluzioni del sistema (A) ad una quaderna analoga $(x', \xi', \eta', \zeta')$ relativa a θ'.

Inoltre, segue dalle (21), identicamente,

$$
x'^2 + \xi'^2 + \eta'^2 - \zeta'^2 = x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 ,
$$

e per ciò il tetraedro coniugato di soluzioni $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ viene cambiato in un altro tetraedro coniugato $(x'_r, \xi'_r, \eta'_r, \zeta'_r)$. A questo secondo tetraedro coniugato corrisponde una nuova deformata rigata S′ del paraboloide, definita alla sua volta (a meno di una traslazione) dalle corrispondenti formole (16)

$$
(22)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial y'_i}{\partial u} = -e^{\theta'}(\eta'_0 + \zeta'_0)(\sqrt{p}\, x'_i + \sqrt{q}\, \xi'_i) \\[2ex]
\dfrac{\partial y'_i}{\partial v} = \sqrt{p}\, \eta'_0\, x'_i - \sqrt{q}\, \zeta'_0\, \xi'_i .
\end{cases}
$$

Ora diciamo che, *collocando convenientemente* S, S′ *nello spazio*, si possono rendere falde focali della congruenza rettilinea W formata dalle congiungenti i punti corrispondenti. Questo si ottiene colle formole

$$
(23)\qquad y'_i = y_i + l \frac{\partial y_i}{\partial u} + m \frac{\partial y_i}{\partial v}
$$

dando ai coefficienti l, m i valori seguenti:

$$
(24)\quad \begin{cases}
l = \dfrac{2c\sqrt{p}\, e^{-\theta}}{\sqrt{4c^2 + p(1-c^2)^2}} \dfrac{\operatorname{senh}\omega(\eta_0\eta'_0 - \zeta_0\zeta'_0) + \cosh\omega(\eta_0\zeta'_0 - \zeta_0\eta'_0)}{(\zeta_0 + \eta_0)^2} \\[2ex]
m = \dfrac{2c\sqrt{p}\, e^{\omega}}{\sqrt{4c^2 + p(1-c^2)^2}} \cdot \dfrac{\zeta'_0 + \eta'_0}{\zeta_0 + \eta_0} .
\end{cases}
$$

Il calcolo del valore del parametro k pel paraboloide omofocale si eseguisce facilmente procedendo come al § 89, vol. III delle *Lezioni*. Per questo si cambino le formole (23) dalle coordinate u, v alle coordinate x_0, ξ_0 invariabili per flessione, ciò che dà

$$y'_i = y_i + \lambda \frac{\partial y_i}{\partial x_0} + \mu \frac{\partial y_i}{\partial \xi_0}, \tag{25}$$

ove

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{2c}{4c^2 + p(1-c^2)^2} \left\{ -2cx_0 + (1-c^2)\sqrt{p}\,(\eta_0 \cosh\omega - \zeta_0 \operatorname{senh}\omega) \right\} \\ \mu &= \frac{2c}{4c^2 + p(1-c^2)^2} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \left\{ 2c \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \xi_0 - (1+c^2)\sqrt{p}\,(\eta_0 \operatorname{senh}\omega - \zeta_0 \cosh\omega) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Se si tien conto della identità

$$(\eta_0 \operatorname{senh}\omega - \zeta_0 \cosh\omega)^2 - (\eta_0 \cosh\omega - \zeta_0 \operatorname{senh}\omega)^2 = 1 + x_0^2 + \xi_0^2,$$

si trova per k il valore seguente:

$$k = \frac{4c^2 p}{4c^2 + p(1-c^2)^2}. \tag{25}$$

Come si vede, è qui k positivo $< p$, e il valore singolare $k = p$, appartenente alla parabola focale del piano yz, corrisponde a $c^2 = 1$.

8. In fine noteremo ancora la forma semplice sotto cui si presenta qui il *teorema di permutabilità* per le trasformazioni B_k delle deformate rigate del paraboloide iperbolico (*Lezioni*, vol. III, cap. IV), bastando indicare il corrispondente teorema di permutabilità per le soluzioni θ della equazione (I) di Liouville.

Siano c_1, c_2 due costanti qualunque, i cui valori assoluti siano però diversi

$$|c_1| \neq |c_2|;$$

e siano (θ, θ_1), (θ, θ_2) due coppie di soluzioni delle equazioni di trasformazione (II):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\theta_1 - \theta)}{\partial u} &= 2c_1 e^{\frac{\theta_1+\theta}{2}} \\ \frac{\partial(\theta_1 + \theta)}{\partial v} &= \frac{2}{c_1} \operatorname{senh}\left(\frac{\theta_1 - \theta}{2}\right) \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\theta_2 - \theta)}{\partial u} &= 2c_2 e^{\frac{\theta_2+\theta}{2}} \\ \frac{\partial(\theta_2 + \theta)}{\partial v} &= \frac{2}{c_2} \operatorname{senh}\left(\frac{\theta_2 - \theta}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

Esiste una quarta soluzione θ' della equazione di Liouville legata alle medesime θ_1, θ_2 dalle medesime formole di trasformazione, ma colle costanti c_1, c_2 invertite, e cioè:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\theta'-\theta_1)}{\partial u} &= 2c_2\, e^{\frac{\theta'+\theta_1}{2}} \\ \frac{\partial(\theta'+\theta_1)}{\partial v} &= \frac{2}{c_2}\operatorname{senh}\left(\frac{\theta'-\theta_1}{2}\right) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\theta'-\theta_2)}{\partial u} &= 2c_1\, e^{\frac{\theta'+\theta_2}{2}} \\ \frac{\partial(\theta'+\theta_2)}{\partial v} &= \frac{2}{c_1}\operatorname{senh}\left(\frac{\theta'-\theta_2}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Questa quarta soluzione θ' risulta determinata, in termini finiti, dalla formola:

$$e^{\frac{\theta'-\theta}{2}} = \frac{c_1\, e^{\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} - c_2}{c_1 - c_2\, e^{\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}}, \tag{26}$$

o dalla equivalente

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta'-\theta}{4}\right) = \frac{c_1+c_2}{c_1-c_2}\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{4}\right). \tag{26*}$$

Matematica. — *Sulle più generali equazioni integrali ed integro-differenziali ad una variabile.* Nota di Giulio Andreoli, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo [1].

1. In questa Nota ci proponiamo di trattare un tipo di equazione integrale generalissimo, che comprende come casi particolari, tutti quelli sinora considerati.

L'equazione sia la

$$\varphi(x) + \lambda \sum_1^n \int_0^{g_r(x)} N_r(xy)\, \varphi(y)\, dy = f(x). \tag{A}$$

Escludiamo per ora il caso che il sommatorio diventi una serie. Notiamo però che se le N_r dipendono da un parametro μ, si possono comprendere anche le « *belastete Integralgleichungen* », recentemente considerate dal Kneser.

Si vede subito che un caso particolare, a cui del resto si riducono le (A), si ottiene se $n=2$, e

$$g_2(x) \geq 0\ ,\ g_1(x) \leq 0 \quad ; \quad N_2(xy) = -N_1(xy) = N(xy)$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1914.