ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Esiste una quarta soluzione θ' della equazione di Liouville legata alle medesime θ_1, θ_2 dalle medesime formole di trasformazione, ma colle costanti c_1, c_2 invertite, e cioè:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\theta'-\theta_1)}{\partial u} &= 2c_2\, e^{\frac{\theta'+\theta_1}{2}} \\ \frac{\partial(\theta'+\theta_1)}{\partial v} &= \frac{2}{c_2}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\theta'-\theta_1}{2}\right) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\theta'-\theta_2)}{\partial u} &= 2c_1\, e^{\frac{\theta'+\theta_2}{2}} \\ \frac{\partial(\theta'+\theta_2)}{\partial v} &= \frac{2}{c_1}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\theta'-\theta_2}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Questa quarta soluzione θ' risulta determinata, in termini finiti, dalla formola:

$$e^{\frac{\theta'-\theta}{2}} = \frac{c_1\, e^{\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} - c_2}{c_1 - c_2\, e^{\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}}, \tag{26}$$

o dalla equivalente

$$\mathrm{tgh}\left(\frac{\theta'-\theta}{4}\right) = \frac{c_1+c_2}{c_1-c_2}\,\mathrm{tgh}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{4}\right). \tag{26*}$$

Matematica. — *Sulle più generali equazioni integrali ed integro-differenziali ad una variabile.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO [1].

1. In questa Nota ci proponiamo di trattare un tipo di equazione integrale generalissimo, che comprende come casi particolari, tutti quelli sinora considerati.

L'equazione sia la

$$\varphi(x) + \lambda \sum_{1}^{n} \int_{0}^{g_r(x)} \mathrm{N}_r(xy)\,\varphi(y)\,dy = f(x). \tag{A}$$

Escludiamo per ora il caso che il sommatorio diventi una serie. Notiamo però che se le N_r dipendono da un parametro μ, si possono comprendere anche le « *belastete Integralgleichungen* », recentemente considerate dal Kneser.

Si vede subito che un caso particolare, a cui del resto si riducono le (A), si ottiene se $n=2$, e

$$g_2(x) \geq 0 \;,\; g_1(x) \leq 0 \quad ; \quad \mathrm{N}_2(xy) = -\,\mathrm{N}_1(xy) = \mathrm{N}(xy)$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1914.

l'equazione diventa allora:

$$(1) \qquad \varphi(x) + \lambda \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \mathrm{N}(xy)\, \varphi(y)\, dy = f(x)\,.$$

Tutti i teoremi dimostrati (¹) per il caso in cui $g_1(x) = 0$, e $g_2(x)$ fosse qualunque, si possono senz'altro ripetere per questo caso più generale.

Si ritrova così tutta la teoria di alcune equazioni considerate dal Lalesco in cui $g_1(x)$ è compreso fra 0 ed x, e $g_2(x) = x$.

A questo tipo di equazioni (A), si può applicare un metodo già da noi adoperato altrove. Supponiamo, perciò, rappresentate le curve $\xi_1 = g_1(z)$, ... $\xi_n = g_n(z)$ in un piano; supponiamo che esista *almeno* un quadrato avente i vertici $(\nu\nu)$, $(\mu\mu)$, $(\nu\mu)$, $(\mu\nu)$ tali che nel suo interno sia compresa l'origine, e che ivi le curve g non vadano mai al di fuori dei due lati paralleli all'asse z. In altri termini, supponiamo che esistano due numeri di segno opposto ν e μ tali che se:

$$\mu \leq x \leq \nu\,,$$

si abbia anche:

$$\mu \leq g_r(x) \leq \nu\,. \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

Costruiamo allora delle funzioni $\mathrm{W}_r(xy)$ tali che:

$$\mathrm{W}_r(xy) = \begin{cases} \mathrm{N}_r(xy) & \text{se } y \text{ è compreso in } [0\,, g_r(x)] \\ 0 & \text{se } y \text{ è esterno a } [0\,, g_r(x)] \end{cases}$$

In tale ipotesi l'equazione (A) si può scrivere:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{\mu}^{\nu} \left\{ \sum_1^n \mathrm{W}_r(xy)\, \varphi(y) \right\} dy = f(x).$$

Cioè la A è stata ridotta ad un'equazione di Fredholm di seconda specie.

2. Tutta la discussione e la risoluzione dell'equazione (A) si può in un modo simile ridurre all'equazione (1) nel seguente modo: Definiamo due funzioni h_1 ed h_2:

$h_1(x) =$ massimo fra i valori positivi delle funzioni: $0\,, g_1(x)\,, \ldots g_r(x)$;
$h_2(x) =$ minimo fra i valori negativi dello stesso gruppo di numeri.

Siano inoltre $g_{i_1}(x)\,, g_{i_2}(x)\,, \ldots g_{i_\mu}(x)$ i valori (per un certo x) di quelli fra le g che sono positivi, disposti in ordine crescente (si vede che gli indici i dipendono da x); e $g_{j_1}(x)\,, \ldots g_{j_\nu}(x)$ quelli negativi.

Allora i nuclei W sono definiti così:

$$\begin{cases} \mathrm{W}_\rho(xy) = \mathrm{N}_\rho(xy) & \text{per } y \text{ compreso in } [0\,, g_\rho(x)]\,; \\ \mathrm{W}_\rho(xy) = 0 & \text{per } y \text{ esterno a } [0\,, g_\rho(x)]\,. \end{cases}$$

(¹) G. Andreoli, Rend. Circ. Mat. Palermo, *Sulle equazioni integrali*, tom. XXXVII.

Indicando poi con W la somma $\sum_1^n W_\rho(xy)$, si vede che le (A) si riducono a

$$\varphi(x) + \int_{h_2(x)}^{h_1(x)} W(xy)\,\varphi(y)\,dy = f(x)\,. \qquad h_1(x) \geq 0\ ,\ h_2(x) \leq 0$$

Questa è appunto un'equazione del tipo (1).

3. Passiamo ora a dire qualche cosa sulle equazioni (ed in conseguenza sui sistemi) integro-differenziali corrispondenti al tipo (A), cioè:

$$\text{(B)} \qquad \sum_{i=0}^{i=\alpha} a_i(x)\,\varphi^{(i)}(x) + \lambda \sum_{r=1}^{n} \int_0^{g_r(x)} \sum_{i=0}^{i=\alpha_r} N_{ri}(xy)\,\varphi^{(i)}(y)\,dy = f(x)\,.$$

Ad esse si può applicare la trasformazione già indicata nelle Note precedenti; porre, cioè, la derivata di ordine più elevato eguale alla funzione incognita $\psi(x)$ e quindi servirsi delle formole

$$\varphi^{(\beta-1)}(x) = \int_0^x \psi(s)\,ds \quad , \quad \varphi^{(\beta-2)}(x) = \int_0^x \frac{(x-s)}{1!}\,\psi(s)\,ds\,, \ldots$$

Allora la (B) si trasforma in un'equazione del tipo (A), dopo avere, naturalmente, scambiato le integrazioni ovunque occorresse; indi passiamo al tipo (1). Oppure, la (B) si può ridurre prima ad un integro-differenziale del tipo (1), col metodo già dato per le integrali

$$\sum_0 a_i(x)\,\varphi^{(i)}(x) + \int_{h_2(x)}^{h_1(x)} \left\{ \sum_0^n N_i(xy)\,\varphi^{(i)}(y) \right\} dy = f(x)\,,$$

ed indi operare su questa la trasformazione indicata. Notiamo però:

Se l'indice di derivazione più alto che comparisce fuori gl'integrali e maggiore o tutt'al più eguale a quello sotto gl'integrali, si ha una equazione integrale di seconda (o terza) specie; nel caso contrario, equazione di prima specie.

In quanto ai sistemi di equazioni integrali di seconda specie, si potranno risolvere col metodo di riduzione indicato altrove.

Se conveniamo di indicare con

$$\int \mathfrak{N}(xs)\,\varphi(s)\,ds\,,$$

un aggregato del tipo

$$\sum_1^n \int_0^{g_i(x)} N_i(xs)\,\varphi(s)\,ds\,,$$

diremo « *sistema di seconda specie* », ogni sistema del tipo 0 ad esso riducibile:

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_1(x)+\int \mathfrak{N}_{11}(xs)\,\varphi_1(s)\,ds+\int \mathfrak{N}_{12}(xs)\,\varphi_2(s)\,ds+\\ &\qquad\qquad+\cdots+\int \mathfrak{N}_{1r}(xs)\,\varphi_r(s)\,ds=f_1(x)\\ &\varphi_2(x)+\int \mathfrak{N}_{21}(xs)\,\varphi_1(s)\,ds+\int \mathfrak{N}_{22}(xs)\,\varphi_2(s)\,ds+\\ &\qquad\qquad+\cdots+\int \mathfrak{N}_{2r}(xs)\,\varphi_r(s)\,ds=f_2(x)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\varphi_r(x)+\int \mathfrak{N}_{r1}(xs)\,\varphi_1(s)\,ds+\int \mathfrak{N}_{r2}(xs)\,\varphi_r(s)\,ds+\\ &\qquad\qquad+\cdots+\int \mathfrak{N}_{rr}(xs)\,\varphi_r(s)\,ds=f_r(x)\,. \end{aligned}\right.$$

Il sistema di riduzione adoperato consiste nel ricavare $\varphi_1(x)$ dalla

$$\varphi_1(x)+\int \mathfrak{N}_{11}(xs)\,\varphi_1(s)\,ds=\left\{f_1(x)-\sum_2^r\int \mathfrak{N}_{1i}(xs)\,\varphi_i(s)\,ds\right\}.$$

Indi si sostituirebbe l'espressione di $\varphi_1(x)$ nelle equazioni seguenti ottenendo un sistema di seconda specie ad $(n-1)$ incognite, e si procederebbe in modo analogo, e così via.

Se tutte le g sono date in modo da soddisfare alla condizione di essere rinchiuse in un quadrato come si è detto prima, allora con l'introduzione dei nuclei W ci ridurremo ad un sistema del Fredholm di seconda specie.

4. Ci permettiamo adesso di svolgere delle considerazioni relative alla equazione:

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^{g(x)} \mathrm{N}(xy)\,\varphi(a)\,dy=f(x)\,, \tag{2}$$

le quali si potranno agevolmente estendere al caso della (A) o della (1).

La (2) in sostanza ci dice che il valore della φ nel punto x, implica la conoscenza e l'esistenza della φ nell'intervallo $=\{0\,,g(x)\}$.

A sua volta la conoscenza della φ in un punto x_1 di questo intervallo, implica quella in tutti i punti dell'intervallo $\{0\,,g(x_1)\}$; e così via. Si vede perciò che la conoscenza della funzione in un punto generico x, implica quella dei valori della funzione in tutta la successione d'intervalli $\mathrm{J}\,,\mathrm{J}_1\,,\mathrm{J}_2\,,\ldots$, ottenuti ciascuno trasformando l'intervallo precedente mediante la funzione g, e poi considerando il minimo intervallo che contenga quest'ultimo ed il punto 0.

In particolare si vede che la conoscenza e l'esistenza della φ in un punto ξ, implica quelle nei punti $g(\xi)$, $g(g(\xi))$, $g(g(g(\xi)))$, ..., e quella nei punti 0, $g(0)$, $g(g(0))$, $g(g(g(0)))$, ...

Si vede così che bisogna ricercare i punti limiti dell'operazione g ottenuti applicando iteratamente l'operazione g ad un punto qualunque. Essi soddisfano evidentemente all'equazione:

$$g(\xi) = \xi .$$

Le radici di tale equazione sono però (come è noto anche dalla teoria delle trasformazioni lineari) di due specie: quelle provenienti dall'applicazione indefinita dell'operazione g, che sono i punti-limiti delle successioni

$$x \,, g(x) \,, g(g(x)) \,, \ldots ;$$

e quelle provenienti dall'applicazione dell'inversa γ (se esiste) della g: i punti-limiti delle

$$x \,, \gamma(x) \,, \gamma(\gamma(x)) \,, \ldots$$

Sieno $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ quelli del primo genere, e sia ξ_p il punto-limite ottenuto partendo dal valore $x = 0$, ξ_q quello proveniente dalla applicazione della g ad un certo punto dell'intorno destro di 0; ξ_r quello da un altro certo punto dell'intorno sinistro. Allora:

È possibile che la soluzione esista solo in quell'intervallo che comprende i punti ξ_q, ξ_p, ξ_r senza esistere altrove; e l'equazione si dirà regolare almeno in quest'intervallo.

Ciò coincide con la possibilità della costruzione di quei tali quadrati.

Per chiarire e fissare le idee poniamo:

$$g(x) = x^2 .$$

Uno dei punti-limiti, è lo zero stesso; un altro è l'unità; il terzo è l'infinito.

Allora sarà possibile risolvere l'equazione nell'intervallo $(0, 1)$ senza che sia risolubile fuori di esso: perciò basta scegliere N in modo che l'integrale

$$\int \mathrm{N}(xy)\, f(y)\, dy ,$$

esteso al limite infinito non converga.

Le stesse cose si potrebbero dire (come già si era visto in parte) se $g(x) = x^k$, $k > 0$.

Così, più generalmente, l'equazione data potrebbe ammettere soluzione in due intervalli staccati fra loro. Basterebbe infatti considerare un secondo intervallo che sia trasformato nel primo $\{\xi_q, \xi_r, \xi_p\}$ mediante la g. Che ciò possa avvenire si vede subito nel caso nostro; infatti l'intervallo $(-1, 0)$ è trasformato in $(0, 1)$.

Si vede infatti che se

$$-1 < x < 0,$$

allora la

$$\varphi(x) + \int_0^{x^2} N(xy)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

è risolta subito se già si conosce la φ nell'intervallo $(0, 1)$. Posto $x = -\xi$, si ha:

$$\varphi(-\xi) = f(-\xi) + \int_0^{\xi^2} N(-\xi, \eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta.$$

Così, ad esempio, le equazioni in cui tutte le successioni

$$\xi, g(\xi), g(g(\xi)), \ldots$$

tendono all'infinito, non sono risolubili, se non quando alle ordinarie condizioni si aggiungano quelle di convergenza degli integrali da considerare. Tale è il caso di

$$g(x) = cx \qquad \text{se } |c| > 1,$$

oppure

$$g(x) = x + a \qquad a \neq 0.$$

Matematica. — *Sopra alcune superficie rigate dipendenti dalle indicatrici sferiche di una curva gobba.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo [1].

Esamino alcune proprietà, che credo nuove, degli enti generati da una retta, o punto, o piano, invariabilmente collegati col centro O di una sfera e i punti corrispondenti delle tre indicatrici, sulla stessa sfera, di una curva gobba. Più che le proprietà ritengo interessante il modo di ottenerle; faccio uso contemporaneamente del *calcolo vettoriale ordinario* (operazioni $\times$, $\wedge$) e delle *formazioni geometriche* di Grassmann-Peano, ottenendo così in modo rapido e semplicissimo delle proprietà abbastanza complesse [2].

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1914.

[2] Il lettore può facilmente verificare che l'uso sistematico di *uno solo* dei due citati algoritmi conduce a calcoli spesso indiretti, sempre più lunghi; e ancor più lunghi