ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

possa avvenire si vede subito nel caso nostro; infatti l'intervallo $(-1, 0)$ è trasformato in $(0, 1)$.

Si vede infatti che se

$$-1 < x < 0,$$

allora la

$$\varphi(x) + \int_0^{x^2} N(xy)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

è risolta subito se già si conosce la φ nell'intervallo $(0, 1)$. Posto $x = -\xi$, si ha:

$$\varphi(-\xi) = f(-\xi) + \int_0^{\xi^2} N(-\xi, \eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta.$$

Così, ad esempio, le equazioni in cui tutte le successioni

$$\xi, g(\xi), g(g(\xi)), \ldots$$

tendono all'infinito, non sono risolubili, se non quando alle ordinarie condizioni si aggiungano quelle di convergenza degli integrali da considerare. Tale è il caso di

$$g(x) = cx \qquad \text{se } |c| > 1,$$

oppure

$$g(x) = x + a \qquad a \neq 0.$$

Matematica. — *Sopra alcune superficie rigate dipendenti dalle indicatrici sferiche di una curva gobba.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo [1].

Esamino alcune proprietà, che credo nuove, degli enti generati da una retta, o punto, o piano, invariabilmente collegati col centro O di una sfera e i punti corrispondenti delle tre indicatrici, sulla stessa sfera, di una curva gobba. Più che le proprietà ritengo interessante il modo di ottenerle; faccio uso contemporaneamente del *calcolo vettoriale ordinario* (operazioni $\times, \wedge$) e delle *formazioni geometriche* di Grassmann-Peano, ottenendo così in modo rapido e semplicissimo delle proprietà abbastanza complesse [2].

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1914.

[2] Il lettore può facilmente verificare che l'uso sistematico di *uno solo* dei due citati algoritmi conduce a calcoli spesso indiretti, sempre più lunghi; e ancor più lunghi

1. Nel punto generico P di una curva gobba i *numeri* s, ϱ, τ e i *vettori* $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ abbiano il solito e noto significato (cfr. ad es. (*), pag. 86).

Inoltre si ponga

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\varrho}\mathbf{b} - \frac{1}{\tau}\mathbf{t}. \tag{1}$$

Il vettore $\mathbf{f}$ è parallelo alla generatrice della *rettificante* della linea P in P [1], ed ha, quindi, direzione fissa $\left(\mathbf{f} \wedge \frac{d\mathbf{f}}{ds} = 0\right)$ solamente quando la linea P è un'*elica*. Inoltre le formule di Frenet assumono la forma semplice

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{f} \wedge \mathbf{t} \quad , \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{f} \wedge \mathbf{n} \quad , \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{f} \wedge \mathbf{b}. \tag{2}$$

Se $\mathbf{u}$ è vettore invariabilmente collegato con $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, cioè $\mathbf{u}$ si può esprimere linearmente mediante $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ con coefficienti costanti (cioè, ancora, i numeri $\mathbf{u} \times \mathbf{t}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{n}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{b}$ sono indipendenti da s), allora per le (2) si ha

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{f} \wedge \mathbf{u}, \tag{2'}$$

e si hanno quindi formule analoghe a quelle del moto di un corpo rigido.

---

se, anche facendo uso del calcolo di Grassmann-Peano, si vogliono esprimere $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linearmente mediante $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ (e non parlo delle coordinate!).

Sarà utile che il lettore abbia conoscenza dei libri che ora cito [per (**) basta la conoscenza delle *appendici*].

(*) C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Élements de calcul vectoriel* (A. Hermann, Paris, 1910).

(**) Idem, *Analyse vectorielle générale* (vol. I e II, Mattei e C., Pavia, 1912-13).

(***) C. Burali-Forti, *Introduction à la géometrie différentielle* (Gauthier-Viilars, Paris, 1897).

(****) Idem, *Corso di geometria analitico-proiettiva* (G. B. Petrini, Torino, 1912.

Le relazioni fondamentali tra i due algoritmi sono le seguenti [cfr. (*) Appendice e (**)]

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \pm \frac{\mathbf{a}|\mathbf{b}}{\Omega} \quad , \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = |(\mathbf{ab}) \quad , \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \frac{\mathbf{abc}}{\Omega},$$

ove $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono *vettori* e Ω è il *trivettore unitario*.

I calcoli che ora esporrò provano, ancora una volta, come sia *insostenibile* l'opinione più volte espressa dal sig. Prandtl [cfr. (**) vol. II, pp. 125-127].

(1) Cfr. (***). Del resto posto $\alpha = \mathrm{P}|\mathbf{n}$ si ha, in virtù della (2') seguente,

$$\alpha' = \mathrm{P}|(\mathbf{f} \wedge \mathbf{n}) = \mathrm{P}\mathbf{fn}$$

e quindi

$$\alpha'\alpha = \mathrm{P}\mathbf{fn} \,.\, \mathrm{P}|\mathbf{n} = \mathrm{P}\mathbf{f}|\mathbf{n} \,.\, \mathrm{P}\mathbf{n} + \mathrm{P}\mathbf{n}|\mathbf{n} \,.\, \mathrm{P}\mathbf{f} = \frac{1}{6}\mathbf{n} \times \mathbf{n} \,.\, \mathrm{P}\mathbf{f} = \frac{1}{6}\mathrm{P}\mathbf{f}.$$

Se O è punto fisso, i punti

$$P_1 = O + \mathbf{t} \quad , \quad P_2 = O + \mathbf{n} \quad . \quad P_3 = O + \mathbf{b} \, ,$$

descrivono, col variare di P, e sulla sfera di centro O e raggio unitario, le *indicatrici sferiche* delle *tangenti, normali principali, binormali* della linea P.

2. Consideriamo una retta invariabilmente collegata con i punti O, P_1, P_2, P_3. Essa è la posizione [cfr. (****), pag. 162, n. 196] di una *forma di seconda specie* di Grassmann-Peano,

$$r = O\mathbf{u} + |\mathbf{v}$$

ad *invariante nullo*, cioè tale che

$$rr = 0 \, , \quad \text{cioè} \quad O\mathbf{u}|\mathbf{v} = 0 \, , \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0 \, ,$$

essendo $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vettori invariabilmente collegati con $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$.

La retta r descrive, col variare di P, *una rigata la cui* linea di stringimento (*o* spigolo di regresso, *se sviluppabile*) *è descritto dal punto*

$$R = O + \frac{1}{(\mathbf{u} \wedge \mathbf{f})^2} \{ \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{f} \, . \, \mathbf{f} + \mathbf{v} \times \mathbf{f} \, . \, \mathbf{u} \wedge \mathbf{f} \} \, . \tag{3}$$

Indichiamo con gli apici le derivate rispetto ad s. È noto [cfr. (***), pag. 97] che R è il baricentro della forma di prima specie

$$r' \{ r | (r\omega \, . \, r'\omega) \} \text{ (1)}.$$

Ora si ha:

$$r' = O(\mathbf{f} \wedge \mathbf{u}) + |(\mathbf{f} \wedge \mathbf{v}) = O|(\mathbf{fu}) + \mathbf{fv} \, , \tag{4}$$

$$r\omega = \mathbf{u} \quad , \quad r'\omega = |(\mathbf{fu}) = \mathbf{f} \wedge \mathbf{u} \, ,$$

$$|(r\omega \, . \, r'\omega) = (r\omega) \wedge (r'\omega) = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{u}^2 \, . \, \mathbf{f} - \mathbf{u} \times \mathbf{f} \, . \, \mathbf{u} \, ,$$

$$r|(r\omega \, . \, r'\omega) = \mathbf{u}^2 \, . \, O\mathbf{uf} + \mathbf{u}^2 \, . \, \mathbf{f}|\mathbf{v} = \mathbf{u}^2 \{ O\mathbf{uf} + \mathbf{f}|\mathbf{v} \} \, ,$$

$$r' \{ r|(r\omega \, . \, r'\omega) \} = \mathbf{u}^2 \{ O|(\mathbf{fu}) + \mathbf{fv} \} \{ O\mathbf{uf} + \mathbf{f}|\mathbf{v}) =$$

$$\mathbf{u}^2 \{ O\mathbf{uf}|\mathbf{fu}) \, . \, O + O\mathbf{f}|\mathbf{v} \, . \, |(\mathbf{fu}) + O\mathbf{vuf} \, . \, \mathbf{f} \} =$$

$$\frac{\mathbf{u}^2}{6} \left\{ \frac{\mathbf{uf}|(\mathbf{fu})}{\Omega} \cdot O + \frac{\mathbf{f}|\mathbf{v}}{\Omega} \cdot |(\mathbf{fu}) + \frac{\mathbf{vuf}}{\Omega} \cdot \mathbf{f} \right\} ,$$

da cui risulta la (3), passando ai simboli $\times, \wedge$ e dividendo per la massa.

(1) $\omega = 6\Omega$; cioè se A è un *punto*, allora $A\omega = 1$.

Se la linea P *non è un'elica, allora i soli casi nei quali la retta* r *descrive una sviluppabile sono i seguenti:*

1°) *la retta* r *passa per* O *e descrive quindi un cono di vertice* O;

2°) *la retta* r *è all'infinito e in tal caso inviluppa la sezione all'infinito del cono descritto dalla retta* $\mathrm{O}\{(\mathbf{v}\wedge\mathbf{f})\wedge\mathbf{v}\}$;

3°) *la retta* r *è parallela alla normale principale in* P, *e in tal caso il punto* R *sta nel piano* $\mathrm{OP_1P_3}$;

4°) *la retta* r *sta nel piano* $\mathrm{OP_1P_3}$, *e in tal caso il punto* R *sta sulla parallela condotta da* O *alla generatrice della rettificante in* P.

Affinchè la retta r descriva una sviluppabile è necessario e sufficiente [cfr. (***)] che si abbia

$$r'r' = 0; \tag{5}$$

ma dalla seconda forma della (4), si ha

$$r'r' = 2\,\mathrm{O}(\mathbf{fv})|\mathbf{fu} = \frac{1}{3}(\mathbf{f}\wedge\mathbf{v})\times(\mathbf{f}\wedge\mathbf{u}) = -\frac{1}{3}\mathbf{u}\times\mathbf{f}\,.\,\mathbf{v}\times\mathbf{f},$$

e quindi la condizione (5) equivale a

$$\mathbf{u}\times\mathbf{f}\,.\,\mathbf{v}\times\mathbf{f} = 0$$

che è verificata soltanto nei casi seguenti

$$\mathbf{v}=0\;,\quad \mathbf{u}=0\;,\quad \mathbf{u}\times\mathbf{f}=0\;,\quad \mathbf{v}\times\mathbf{f}=0$$

corrispondenti appunto ai casi 1°), 2°), 3°), 4°) del teorema.

Il 1°) caso è evidente.

Per il 2°) basta osservare che la retta all'infinito, posizione del bivettore $|\mathbf{v}$, inviluppa la sezione all'infinito del cono inviluppato dal piano $\alpha = \mathrm{O}|\mathbf{v}$ e che la caratteristica in α è appunto la retta [cfr. (***)]

$$\begin{aligned}\alpha\alpha' &= (\mathrm{O}|\mathbf{v})\,(\mathrm{O}\mathbf{fv}) = -\,(\mathrm{O}\mathbf{fv})\,(\mathrm{O}|\mathbf{v})\\ &= -\,\mathrm{O}\mathbf{f}|\mathbf{v}\,.\,\mathrm{O}\mathbf{v} + \mathrm{O}\mathbf{v}|\mathbf{v}\,.\,\mathrm{O}\mathbf{f}\\ &= \frac{1}{6}\,\mathrm{O}\{\mathbf{v}^2\,.\,\mathbf{f} - \mathbf{v}\times\mathbf{f}\,.\,\mathbf{v}\} = \frac{1}{6}\,\mathrm{O}\{(\mathbf{v}\wedge\mathbf{f})\wedge\mathbf{v}\}.\end{aligned}$$

Se $\mathbf{u}\times\mathbf{f}=0$, risulta dalla (1) che $\mathbf{u}$ è parallelo ad $\mathbf{n}$ [1]. I due vettori $\mathbf{f}, \mathbf{u}\wedge\mathbf{f}$ che compariscono nella espressione (3) di R, sono paralleli al bivettore $\mathbf{bt}$ e quindi R sta sul piano $\mathrm{OP_1P_3}$.

[1] $\mathbf{f}\times\mathbf{u} = \frac{1}{\varrho}\mathbf{b}\times\mathbf{u} - \frac{1}{\tau}\mathbf{t}\times\mathbf{u}$; ma $\mathbf{b}\times\mathbf{u}$, $\mathbf{t}\times\mathbf{u}$ sono costanti, ϱ/τ non è, per ipotesi, costante, e quindi $\mathbf{f}\times\mathbf{u}=0$ solo quando $\mathbf{b}\times\mathbf{u}=0$ e $\mathbf{t}\times\mathbf{u}=0$ cioè $\mathbf{u}$ è parallelo a $\mathbf{b}\wedge\mathbf{t}=\mathbf{n}$.

Se $\mathbf{v} \times \mathbf{f} = 0$, allora $\mathbf{v}$ è parallelo ad $\mathbf{n}$, e poichè $\mathbf{u}$ è normale a $\mathbf{v}$, risulta che $\mathbf{u}$, come $|\mathbf{v}$, è parallelo al bivettore $\mathbf{bt}$, cioè r sta nel piano OP_1P_3. Dalla (3) risulta subito che R sta sulla retta Of.

Nel caso che la linea P sia un'*elica*, la sua rettificante è un cilindro, e quindi $\mathbf{f}$ è parallelo ad un vettore costante $\mathbf{k}$. Segue che i casi 3°) e 4°) si accrescono di tutte le rette r per le quali si ha $\mathbf{u} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{a}$, oppure $\mathbf{v} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{a}$ con $\mathbf{u} \times \mathbf{k} \wedge \mathbf{a} = 0$, essendo $\mathbf{a}$ un vettore normale a $\mathbf{k}$ invariabilmente collegato con $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, ma arbitrario. Si può osservare che le indicatrici sono circonferenze ecc.; inoltre esaminare i casi particolari, interessanti, $\varrho = \pm \tau$ e l'*elica circolare*.

Le traiettorie ortogonali delle generatrici della rigata r sono descritte dal punto

$$Q = O + \frac{1}{\mathbf{u}^2}\left\{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} - \left(\int \mathbf{v} \times \mathbf{f}\, ds\right)\mathbf{u}\right\}$$

che dipende anche dalla costante di integrazione [1].

Dovendo essere $\mathbf{u}$ normale a $\mathbf{v}$ si può fissare un vettore $\mathbf{a}$, normale ad $\mathbf{u}$ e invariabilmente collegato con $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, in guisa che

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{u}, \text{ o, il che equivale, porre } \mathbf{a} = \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}{\mathbf{u}^2};$$

essendo allora

$$r = O\mathbf{u} + |\mathbf{v} = O\mathbf{u} + \mathbf{a}\mathbf{u} = (O + \mathbf{a})\,\mathbf{u},$$

per il punto Q si ha

$$Q = O + \mathbf{a} + x\mathbf{u},$$

con x funzione di s tale che $Q' \times \mathbf{u} = 0$; ma si ha

$$\begin{aligned} Q' \times \mathbf{u} &= \{\mathbf{f} \wedge \mathbf{a} + x'\mathbf{u} + x\mathbf{f} \wedge \mathbf{u}\} \times \mathbf{u} = \mathbf{f} \times \mathbf{a} \wedge \mathbf{u} + x'\mathbf{u}^2 \\ &= \mathbf{f} \times \mathbf{v} + x'\mathbf{u}^2 = 0, \end{aligned}$$

da cui risulta la forma di Q, perchè $\mathbf{u}^2$ è costante,

3. Avendo $\mathbf{u}$ il precedente significato ed essendo m numero reale costante, poniamo

$$(6) \qquad M = O + \mathbf{u} \quad , \quad \alpha = O|\mathbf{u} + m\boldsymbol{\Omega}.$$

Il punto M e il piano posizione di α, sono invariabilmente collegati con O, P_1, P_2, P_3; il punto M descrive una linea sferica che può chiamarsi *indicatrice* del piano α; il piano α inviluppa una rigata.

[1] Dalla identità $\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{t}.\mathbf{t} + \mathbf{v} \times \mathbf{n}.\mathbf{n} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}.\mathbf{b}$ si ha

$$\int \mathbf{v} \times \mathbf{f}\, ds = \int \left\{\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{b}}{\varrho} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{t}}{\tau}\right\} ds = \mathbf{v} \times \mathbf{b}.\int \frac{ds}{\varrho} - \mathbf{v} \times \mathbf{t}.\int \frac{ds}{\tau},$$

e quindi Q si può esprimere mediante gli archi delle indicatrici P_1, P_3.

Il piano normale alla linea M *nel punto* M *è parallelo alla normale al piano* α *(al vettore* **u***) e alla generatrice della rettificante in* P *(al vettore* **f***). La caratteristica, in* α*, dell'inviluppo del piano* α*, sta nel piano uscente da* O *e parallelo al piano normale in* M. *Il punto di regresso, in* α*, dell'inviluppo del piano* α *sta nella retta uscente da* O *e parallela alla binormale in* M.

Dalle (6) si ha subito

$$M' = \mathbf{f} \wedge \mathbf{u} \quad , \quad \alpha' = O|(\mathbf{f} \wedge \mathbf{u}) = O\mathbf{f}\mathbf{u}$$

che dimostrano le prime due parti del teorema, perchè la retta $\alpha\alpha'$ è la caratteristica in α e M' è la direzione della tangente in M.

Derivando ancora si ha

$$M'' = \mathbf{f}' \wedge \mathbf{u} + \mathbf{f} \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{u}) \quad , \quad \alpha'' = O\mathbf{f}'\mathbf{u} + O\mathbf{f}|(\mathbf{f}\mathbf{u}) \, ,$$

e quindi

$$M' \wedge M'' = \mathbf{f} \wedge \mathbf{f}' \times \mathbf{u} \, . \, \mathbf{u} + (\mathbf{f} \wedge \mathbf{u})^2 \, . \, \mathbf{f} \, .$$

$$\alpha'\alpha'' = O\mathbf{f}\mathbf{f}'\mathbf{u} \, . \, O\mathbf{u} - O\mathbf{u}\mathbf{f}|(\mathbf{f}\mathbf{u}) \, . \, O\mathbf{f}$$

$$= \frac{1}{6} O \{ \mathbf{f} \wedge \mathbf{f}' \times \mathbf{u} \, . \, \mathbf{u} + (\mathbf{f} \wedge \mathbf{u})^2 \, . \, \mathbf{f} \} \, ,$$

che dimostrano l'ultima parte del teorema, perchè $M' \wedge M''$ ha la direzione della binormale in M, ed essendo $\alpha\alpha'\alpha''$ il punto di regresso in α tale punto sta nella retta $\alpha'\alpha''$ [1].

4. Dalle formule precedenti risultano facilmente le proprietà che seguono.

Delle rette (*r*) P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2, *soltanto* P_3P_1 *descrive una rigata sviluppabile; i punti* R *per queste rette sono*

$$(2\varrho^2 + \tau^2) R_1 = \varrho^2 P_2 + (\varrho^2 + \tau^2) P_3$$

$$(\tau - \varrho) R_2 = \tau P_3 - \varrho P_1$$

$$(\varrho^2 + 2\tau^2) R_3 = (\varrho^2 + \tau^2) P_1 + \tau^2 P_2 \, .$$

[1] Calcolando il prodotto regressivo di $\alpha'\alpha''$ per α e dividendo per la massa, risulta facilmente che il punto di regresso in α è

$$O + \frac{m}{\mathbf{f} \wedge \mathbf{f}' \times \mathbf{u} \, . \, \mathbf{u}^2 + \mathbf{f} \times \mathbf{u} \, . \, (\mathbf{f} \wedge \mathbf{u})^2} \{ \mathbf{f} \wedge \mathbf{f}' \times \mathbf{u} \, . \, \mathbf{u} + (\mathbf{f} \wedge \mathbf{u})^2 \, . \, \mathbf{f} \} \, .$$

e risulta subito (da 1ª *e* 3ª *sommando) che la retta* R_1R_3 *passa per il punto*

$$G = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3},$$

baricentro dei punti P_1, P_2, P_3 (¹).

Le rigate descritte dalle rette P_2P_3, P_1P_2 *sono toccate dal piano* $P_1P_2P_3$ *nei punti* H_1, H_3 *tali che*

$$(2\varrho + \tau)\, H_1 = \varrho P_2 + (\varrho + \tau)\, P_3$$

$$(\varrho + 2\tau)\, H_3 = (\varrho + \tau)\, P_2 + \tau P_3\,,$$

e la retta H_1H_3 *passa per i punti* G, R_2.

La caratteristica nel piano $P_1P_2P_3$ *è la retta* H_1H_3, o, il che equivale, la retta GR_2, *e il punto di regresso è il baricentro di*

$$3\begin{vmatrix} \varrho & \tau \\ \varrho' & \tau' \end{vmatrix} G - 2\,\frac{\varrho^3 - \tau^3}{\varrho\tau}\, R_2 \ (^2).$$

(¹) Dalle stesse formule risulta pure che

$$(2\varrho^2 + \tau^2)(\varrho^2 + 2\tau^2)\, R_1\, R_2\, R_3 = \varrho\tau(\varrho^2 + \tau^2)\, P_1\, P_2\, P_3\,,$$

e quindi i punti R_1, R_2, R_3 non sono collineari.

La forma di seconda specie, ad invariante nullo,

$$q = \tau^2\, P_2\, P_3 - (\varrho^2 + \tau^2)\, P_3\, P_1 + \varrho^2\, P_1\, P_2$$

sta nella retta $R_1\, R_3$, ed è notevole che

$$q'q' = \tau - \varrho\,.$$

Per l'*involuzione* λ che lega le coppie di punti, ad es., di $P_2\, P_3$ nei quali i piani tangenti sono ortogonali, si ha

$$\lambda = \begin{pmatrix} \varrho^2\, P_2 + (\varrho^2 + 2\tau^2)\, P_3 & , & -\varrho^2\, P_2 - \varrho^2\, P_3 \\ P_2 & & P_3 \end{pmatrix},$$

che applicata a $P_2 - P_3$ dà, appunto, R_1.

(²) La caratteristica in $P_1\, P_2\, P_3$ è la posizione di

$$p = \tau\, P_2\, P_3 - (\varrho + \tau)\, P_3\, P_1 + \varrho\, P_1\, P_2\,,$$

e si ha

$$p' = \left(\frac{\varrho + \tau}{\varrho} + \tau'\right) P_2\, P_3 + \left(\frac{\varrho^2 + \tau^2}{\varrho\tau} - \varrho' - \tau'\right) P_3\, P_1 + \left(\frac{\varrho + \tau}{\tau} + \varrho'\right) P_1\, P_2\,;$$

il prodotto regressivo, nel piano $P_1\, P_2\, P_3$, di p per p' dà

$$(\varrho\tau' - \varrho'\tau)(P_1 + P_2 + P_3) + \frac{2(\varrho^2 + \tau^2 + \varrho\tau)}{\varrho\tau}\,(\tau P_3 - \varrho P_1)\,,$$

che si pone facilmente sotto la forma precedente.

I piani OP_2P_3, OP_1P_2 *inviluppano i coni direttori* (*vertice* O) *delle rigate delle binormali e tangenti della linea* P (*generatrici* OP_3, OP_1), *e il piano* OP_3P_1 *inviluppa il cono direttore della rettificante* (*generatrice* OR_2).

Il cono direttore (*vertice* O) *della rigata delle normali principali è l'inviluppo dei piani condotti per* O *normalmente alle generatrici della rettificante della linea* P (*perchè* $\mathrm{O}\mathbf{nn}' = \mathrm{O}|\{\mathbf{n} \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{n})\} = \mathrm{O}|\mathbf{f}$) *e il piano tangente a tale cono lungo la retta* OP_2 *taglia la retta* P_3P_1 *nel simmetrico, rispetto al punto medio tra* P_1, P_3, *del coniugato armonico di* R_2 *rispetto a* P_1 *e* P_3.

Analisi algebrica. — *Nuova rappresentazione della sostituzione lineare binaria primitiva.* Nota di C. Cellitti, presentata dal Socio V. Volterra [1].

Noi vogliamo qui stabilire una relazione che riesce assai utile in qualche importante questione di analisi. A quest'ordine di idee mi hanno efficacemente spinto alcuni risultati già noti, che trovansi nel *Formulario matematico del Peano*, e i lavori, sulla teoria delle sostituzioni, contenuti nell'*Encyclopédie des sciences mathématiques*.

Posto

$$ {}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{K}\,{}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{N} = \begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, $$

dove D è un intero qualunque, io dico che *ogni arbitraria sostituzione lineare binaria primitiva*

$$ \mathrm{S} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} $$

di modulo D *può sempre esprimersi mediante la formula*

$$ \mathrm{S} = \mathrm{H}^{\mu} . \mathrm{K}^{\nu} . \mathrm{H}^{\xi} . \mathrm{K}^{\omega} \ldots \mathrm{N} . \mathrm{K}^{\varrho} . \mathrm{H}^{\sigma} , $$

ove $\mu, \nu, \xi, \omega \ldots, \varrho, \sigma$ *sono numeri interi positivi o negativi; il prodotto*

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 settembre 1914.

(2) Considerando la sostituzioni H e K, si scorge di leggieri che, per effettuare potenze qualsiasi di esse basta moltiplicare il secondo coefficiente di H ed il terzo coefficiente di K per l'esponente

$$ \mathrm{H}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{K}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} . $$