ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

I piani OP_2P_3, OP_1P_2 *inviluppano i coni direttori* (*vertice* O) *delle rigate delle binormali e tangenti della linea* P (*generatrici* OP_3, OP_1), *e il piano* OP_3P_1 *inviluppa il cono direttore della rettificante* (*generatrice* OR_2).

Il cono direttore (*vertice* O) *della rigata delle normali principali è l'inviluppo dei piani condotti per* O *normalmente alle generatrici della rettificante della linea* P (*perchè* $O\mathbf{n}\mathbf{n}' = O|\{\mathbf{n} \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{n})\} = O|\mathbf{f}$) *e il piano tangente a tale cono lungo la retta* OP_2 *taglia la retta* P_3P_1 *nel simmetrico, rispetto al punto medio tra* P_1, P_3, *del coniugato armonico di* R_2 *rispetto a* P_1 *e* P_3.

Analisi algebrica. — *Nuova rappresentazione della sostituzione lineare binaria primitiva.* Nota di C. Cellitti, presentata dal Socio V. Volterra [1].

Noi vogliamo qui stabilire una relazione che riesce assai utile in qualche importante questione di analisi. A quest'ordine di idee mi hanno efficacemente spinto alcuni risultati già noti, che trovansi nel *Formulario matematico del Peano*, e i lavori, sulla teoria delle sostituzioni, contenuti nell'*Encyclopédie des sciences mathématiques*.

Posto

$$(^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad K\,(^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove D è un intero qualunque, io dico che *ogni arbitraria sostituzione lineare binaria primitiva*

$$S = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

di modulo D *può sempre esprimersi mediante la formula*

$$S = H^{\mu} . K^{\nu} . H^{\xi} . K^{\omega} \ldots N . K^{\rho} . H^{\sigma} ,$$

ove $\mu, \nu, \xi, \omega \ldots, \varrho, \sigma$ *sono numeri interi positivi o negativi ; il prodotto*

[1] Pervenuta all'Accademia il 12 settembre 1914.

[2] Considerando la sostituzioni H e K, si scorge di leggieri che, per effettuare potenze qualsiasi di esse basta moltiplicare il secondo coefficiente di H ed il terzo coefficiente di K per l'esponente

$$H^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad K^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

che precede N *è un prodotto di un numero finito di potenze di* H *e di* K *alternate; quello che segue* N *è un prodotto di due sole potenze, una di* K, *l'altra di* H. Tale risultato potrebbe sostanzialmente dirsi incluso nelle considerazioni aritmetiche, esposte nei trattati, per la trasformazione delle funzioni ellittiche e l'irriducibilità dell'equazione modulare; ma può bene considerarsi nuovo per la singolare proprietà, non priva di interesse, che a destra di N bastano i soli fattori K^ρ, H^σ, e per il processo dimostrativo che ne daremo, assai più semplice, per quanto simile a quello che si usa per ricondurre ogni sostituzione unimodulare ad una succesione delle generatrici $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

A titolo di premessa vogliamo intanto dimostrare che se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sono quattro numeri interi primi, tra loro vincolati dalle condizioni che il determinante* $\alpha\delta - \beta\gamma$ *non sia nullo, allora può sempre determinarsi un intero* λ *tale che* $\beta + \alpha\lambda$, $\delta + \gamma\lambda$ *risultino anch'essi primi tra loro.*

Ciò si potrebbe far discendere da un ben noto teorema del Dirichlet [1], ma possiamo farcene una più facile idea col metodo assai elementare che ora daremo.

Il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ abbia i divisori primi $d_1, d_2, d_3, \ldots d_n$; non è escluso che qualcuno di essi possa esser comune a β e a δ: facciamo allora una classe K_1 di numeri d_i che siano divisori comuni a β e δ, e coi rimanenti d_j facciamo una classe K_2.

Prendiamo per λ [2] il prodotto dei numeri della classe K_2; io dico che $\beta + \alpha\lambda, \delta + \gamma\lambda$ risultano primi tra di loro.

Ed invero, consideriamo l'identità

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha(\delta + \gamma\lambda) - \gamma(\beta + \alpha\lambda).$$

Ogni divisore comune a $\delta + \gamma\lambda$ e a $\beta + \alpha\lambda$ dividerà la differenza $\alpha(\delta + \gamma\lambda) - \gamma(\beta - \alpha\lambda)$, e conseguentemente il primo membro $\alpha\delta - \beta\gamma$ di

[1] *Nella progressione* $a + bk$, *ove* a *e* b *sono primi tra loro e* $k = 1, 2, 3 \ldots$, *esistono infiniti numeri primi.*

D'altra parte, poichè ogni numero primo è primo con tutti i numeri che non sono suoi multipli, appare manifesto come sia possibile di rendere $\beta + \alpha\lambda$, $\delta + \gamma\lambda$ primi tra loro, pur di scegliere λ in modo che uno di quei due binomii risulti numero primo, e l'altro non multiplo di esso.

[2] Il numero λ, altro non è che il prodotto di quei soli divisori di $\alpha\delta + \beta\gamma$ che non sono comuni a β e δ. Dal che si vede che per la formazione di λ si dovranno depennare, nella serie dei divisori $d_1, d_2, \ldots d_n$ del determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$, quelli che dividono β e δ; quindi solo allora potrà aversi $\lambda = 1$, quando $\alpha\delta - \beta\lambda$ è solo divisibile per l'unità, o quando tutti i divisori di $\alpha\delta - \beta\gamma$ potessero coincidere con quelli di β e δ; il qual caso condurrebbe all'eguaglianza $\alpha\delta - \beta\gamma = \beta = \delta$, priva di significato. Si avrà, conchiudendo, $\lambda = 1$, quando, e solamente quando, è $\alpha\delta - \beta\gamma$ numero primo.

quella identità; ma $\alpha\delta - \beta\gamma$ ha per divisori solo i numeri delle classi K_1, K_2: dunque, se divisori comuni a $\beta + \alpha\lambda$ e a $\delta + \gamma\lambda$ vi fossero, essi dovrebbero forzatamente appartenere alle classi K_1, K_2. Se arriveremo quindi a dimostrare che nessuno dei numeri delle classi K_1, K_2 può esser divisore comune a $\beta + \alpha\lambda$ e a $\delta + \gamma\lambda$, si potrà senz'altro conchiudere che $\beta + \alpha\lambda, \delta + \gamma\lambda$ sono primi tra loro.

A tal uopo, se la classe K_1 potesse contenere dei divisori comuni a $\beta + \alpha\lambda$ e a $\delta + \gamma\lambda$, essi, essendo già per ipotesi comuni a β e a δ, dovrebbero dividere la restanti parti $\alpha\lambda, \gamma\lambda$; e non potendo dividere λ (essendo λ il prodotto dei numeri della classe K_2), dovrebbero dividere α e γ e, contro le ipotesi, esisterebbero divisori comuni ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Analogamente, i numeri della classe K_2 essendo divisori di $\alpha\lambda, \gamma\lambda$, per poter dividere contemporaneamente $\beta + \alpha\lambda$ e $\delta + \gamma\lambda$ dovrebbero dividere β e δ; il che è eziandio assurdo, avendo posto nella K_2 i numeri che non sono divisori comuni a γ e a δ.

I numeri $\beta + \alpha\lambda, \delta + \gamma\lambda$ non potendo, quindi, ammettere per divisori in comune nessuno dei numeri delle classi K_1, K_2 risulteranno primi tra loro. Rimane così stabilita la proposizione preliminare, dianzi enunciata.

In base a questa, si dimostra facilmente la formula che è oggetto della presente Nota.

Sia

$$S = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

un'arbitraria sostituzione lineare binaria primitiva in cui, dunque, p, q, r, s sono numeri interi primi tra loro, positivi o negativi.

Ponendo $S_1 = SH^\lambda$ e sostituendo ad S e ad H i veri valori, avremo:

$$S_1 = \begin{pmatrix} p & q + p\lambda \\ r & s + r\lambda \end{pmatrix}.$$

E scelto λ in modo che i binomii $q + p\lambda, s + r\lambda$ risultino primi tra loro (ciò che è possibile per la proposizione dianzi dimostrata), si ponga

$$q + p\lambda = q'$$
$$s + r\lambda = s';$$

allora avremo

$$S_1 = \begin{pmatrix} p & q' \\ r & s' \end{pmatrix}.$$

Distinguiamo ora due casi, secondochè il numero delle divisioni necessarie per la ricerca del m. c. d. ($= 1$) tra q' ed s' è pari o dispari. Supponiamo sia pari.

Detto θ il quoziente (1) della divisione dei numeri q' ed s', e posto $S_2 = K^{-\theta} S_1$, avremo, sostituendo,

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-\theta} \begin{pmatrix} p & q' \\ r & s' \end{pmatrix},$$

da cui

$$S_2 = \begin{pmatrix} p & q' \\ r - p\theta & s' - q'\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q' \\ p' & q'' \end{pmatrix},$$

ove, essendo θ il quoziente della divisione dei numeri q' ed s', sarà q'' il resto.

Detto τ il quoziente della divisione dei numeri q' e q'' e posto $S_3 = H^{-\tau} S_2$, si ha

$$S_3 = \begin{pmatrix} p - \tau p' & q' - \tau q'' \\ p' & q'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'' & q''' \\ p' & q'' \end{pmatrix},$$

ove, essendo τ il quoziente della divisione dei numeri q', q'', sarà q''' il resto.

Sia ora ω il quoziente della divisione dei numeri q'', q''', e si ponga $S_4 = K^{-\omega} S_3$; allora avremo

$$S_4 = \begin{pmatrix} p'' & q''' \\ p' - \omega p'' & q'' - \omega q''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'' & q''' \\ p''' & q^{\text{IV}} \end{pmatrix}.$$

Procedendo in modo analogo, i numeri q vanno sempre decrescendo, e sono i resti successivi che si incontrano nella ricerca del m. c. d. ($= 1$) tra q' ed s'.

Se il numero delle divisioni necessarie per la ricerca del m. c. d. ($= 1$) tra q' ed s', invece di esser pari, fosse dispari, anzichè porre $S_2 = K^{-\theta} . S_1$, s'incomincerebbe col porre $S_2 = H^{-\theta} . S_1$, e si procederebbe in modo analogo; si compendiano in uno i due casi, considerando l'unità come la potenza zero di un'arbitraria sostituzione.

È facile vedere come, in ambo i casi, il nostro procedimento conduca ad una sostituzione del tipo

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & 1 \end{pmatrix},$$

e risulta quindi

$$S = H^{\mu} . K^{\nu} . H^{\xi} \dots A . H^{\sigma}.$$

Si tratta ora di far vedere che può sempre porsi

$$A = N . K^{\rho}.$$

Ed invero, posto

$$B = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(1) Evidentemente, se q' ed s' fossero di segno contrario, il quoziente della loro divisione sarebbe $-\theta$: ed allora anzichè, porre $S_2 = K^{-\theta} . S_1$, dovrebbe porsi $S_2 = K^{\theta} . S_1$.

ed eseguito il prodotto BK^{ρ} si trova precisamente A purchè si assuma $\varrho = R$
Con ciò si viene a stabilire l'eguaglianza

$$S = H^{\mu} . K^{\nu} . H^{\xi} \dots B . K^{\rho} . H^{\sigma} .$$

Il modulo del secondo membro dipende dalla sola sostituzione B, essendo le altre unimodulari; ma il modulo di S lo abbiamo supposto D: quindi, basta fare $P = D$ per cadere nella formula che volevamo stabilire.

Diamo, ora, un *esempio numerico* di quanto abbiamo suesposto.

Sia

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 8 & 80 \end{pmatrix} .$$

Dividendo i coefficienti 12, 16, 8, 80 per il loro m. c. d. (ciò che è lecito di fare), la S diventa:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 20 \end{pmatrix} ,$$

ove, 3, 4, 2, 20 sono primi tra di loro.

Ponendo $S_1 = SH^{\lambda}$, avremo:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\lambda} = \begin{pmatrix} 3 & 4 + 3\lambda \\ 2 & 20 + 2\lambda \end{pmatrix} .$$

Si vede che per $\lambda = 1$ i binomî $4 + 3\lambda$, $20 + 2\lambda$ risultano primi tra loro, ed S_1 diventa

$$S_1 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 22 \end{pmatrix} .$$

Poichè il numero delle divisioni necessarie per la ricerca del m. c. d. $(= 1)$ tra 22 e 7 è pari, s'incomincerà col porre $S_2 = K^{-3} S_1$, ove 3 è il quoziente di 22 per 7; così avremo:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} .$$

Essendo 7 il quoziente di 7 per 1, porremo $S_3 = H^{-9} S_2$; ovvero, sostituendo,

$$S_3 = \begin{pmatrix} 52 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} .$$

Posto ora

$$N = \begin{pmatrix} 52 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

ed eseguito il prodotto $N . K^{\varrho}$, avremo la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 52 & 0 \\ \varrho & 1 \end{pmatrix},$$

da cui si vede che basta assumere $\varrho = -7$ per avere la S_2; quindi possiamo scrivere

$$S_3 = \begin{pmatrix} 52 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-7}.$$

E ricordando che $H^0 = 1$. avremo infine

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{7} \begin{pmatrix} 52 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

come è facile di verificare.

Chimica. — *Sopra un nuovo poliazobenzolo* [1]. Nota del dott. BRUNO VALORI, presentata dal Socio A. ANGELI [2].

È noto come Caro, per ossidazione di anilina sia pervenuto, attraverso alla fenilidrossilammina, al nitrosobenzolo. Analogamente il p. amidoazobenzolo

(I) $$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . NH_2$$

ossidato in soluzione acetica con peridrol, passa probabilmente in una prima fase nel composto

(II) $$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . NH . OH$$

e successivamente quindi nel derivato

(III) $$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . NO$$

Quest'ultimo (III) reagisce immediatamente col p. amidoazobenzolo (I) ancora inalterato per dare

$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . NH_2 + ON . C_6H_4 . N_2 . C_6H_5 =$$
$$= C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . N = N . C_6H_4 . N_2 . C_6H_5 .$$

ed è questo poliazobenzolo con tre gruppi N_2, fino ad ora non conosciuto, il prodotto principale che si ottiene ossidando con peridrol la soluzione ace-

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica e Farmacia del R. Istituto di Studî superiori di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1914.