

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

I piani OP_2P_3 , OP_1P_2 inviluppano i coni direttori (vertice O) delle rigate delle binormali e tangenti della linea P (generatrici OP_3 , OP_1), e il piano OP_3P_1 inviluppa il cono direttore della rettificante (generatrice OR_2).

Il cono direttore (vertice O) della rigata delle normali principali è l'inviluppo dei piani condotti per O normalmente alle generatrici della rettificante della linea P (perchè $Onn' = O \mid \{ n \wedge (f \wedge n) \} = O \mid f$) e il piano tangente a tale cono lungo la retta OP_2 taglia la retta P_3P_1 nel simmetrico, rispetto al punto medio tra P_1 , P_3 , del coniugato armonico di R_2 rispetto a P_1 e P_3 .

Analisi algebrica. — Nuova rappresentazione della sostituzione lineare binaria primitiva. Nota di C. CELLITTI, presentata dal Socio V. VOLTERRA ⁽¹⁾.

Noi vogliamo qui stabilire una relazione che riesce assai utile in qualche importante questione di analisi. A quest'ordine di idee mi hanno efficacemente spinto alcuni risultati già noti, che trovansi nel *Formulario matematico del Peano*, e i lavori, sulla teoria delle sostituzioni, contenuti nell'*Encyclopédie des sciences mathématiques*.

Posto

$$(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove D è un intero qualunque, io dico che ogni arbitraria sostituzione lineare binaria primitiva

$$S = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

di modulo D può sempre esprimersi mediante la formula

$$S = H^\mu \cdot K^\nu \cdot H^\xi \cdot K^\omega \dots N \cdot K^\rho \cdot H^\sigma,$$

ove $\mu, \nu, \xi, \omega, \dots, \rho, \sigma$ sono numeri interi positivi o negativi; il prodotto

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 12 settembre 1914.

⁽²⁾ Considerando la sostituzioni H e K, si scorge di leggieri che, per effettuare potenze qualsiasi di esse basta moltiplicare il secondo coefficiente di H ed il terzo coefficiente di K per l'esponente

$$H^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

che precede N è un prodotto di un numero finito di potenze di H e di K alternate; quello che segue N è un prodotto di due sole potenze, una di K , l'altra di H . Tale risultato potrebbe sostanzialmente dirsi incluso nelle considerazioni aritmetiche, esposte nei trattati, per la trasformazione delle funzioni ellittiche e l'irriducibilità dell'equazione modulare; ma può bene considerarsi nuovo per la singolare proprietà, non priva di interesse, che a destra di N bastano i soli fattori K^p, H^q , e per il processo dimostrativo che ne daremo, assai più semplice, per quanto simile a quello che si usa per ricondurre ogni sostituzione unimodulare ad una successione delle generatrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A titolo di premessa vogliamo intanto dimostrare che se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono quattro numeri interi primi, tra loro vincolati dalle condizioni che il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ non sia nullo, allora può sempre determinarsi un intero λ tale che $\beta + \alpha\lambda, \delta + \gamma\lambda$ risultino anch'essi primi tra loro.

Ciò si potrebbe far discendere da un ben noto teorema del Dirichlet ⁽¹⁾, ma possiamo farcene una più facile idea col metodo assai elementare che ora daremo.

Il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ abbia i divisori primi $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$; non è escluso che qualcuno di essi possa esser comune a β e a δ : facciamo allora una classe K_1 di numeri d_i che siano divisori comuni a β e δ , e coi rimanenti d_j facciamo una classe K_2 .

Prendiamo per λ ⁽²⁾ il prodotto dei numeri della classe K_2 ; io dico che $\beta + \alpha\lambda, \delta + \gamma\lambda$ risultano primi tra di loro.

Ed invero, consideriamo l'identità

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha(\delta + \gamma\lambda) - \gamma(\beta + \alpha\lambda).$$

Ogni divisore comune a $\delta + \gamma\lambda$ e a $\beta + \alpha\lambda$ dividerà la differenza $\alpha(\delta + \gamma\lambda) - \gamma(\beta + \alpha\lambda)$, e conseguentemente il primo membro $\alpha\delta - \beta\gamma$ di

⁽¹⁾ Nella progressione $a + bk$, ove a e b sono primi tra loro e $k = 1, 2, 3, \dots$, esistono infiniti numeri primi.

D'altra parte, poichè ogni numero primo è primo con tutti i numeri che non sono suoi multipli, appare manifesto come sia possibile di rendere $\beta + \alpha\lambda, \delta + \gamma\lambda$ primi tra loro, pur di scegliere λ in modo che uno di quei due binomii risulti numero primo, e l'altro non multiplo di esso.

⁽²⁾ Il numero λ , altro non è che il prodotto di quei soli divisori di $\alpha\delta + \beta\gamma$ che non sono comuni a β e δ . Dal che si vede che per la formazione di λ si dovranno dipendere, nella serie dei divisori d_1, d_2, \dots, d_n del determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$, quelli che dividono β e δ ; quindi solo allora potrà aversi $\lambda = 1$, quando $\alpha\delta - \beta\gamma$ è solo divisibile per l'unità, o quando tutti i divisori di $\alpha\delta - \beta\gamma$ potessero coincidere con quelli di β e δ ; il qual caso condurrebbe all'eguaglianza $\alpha\delta - \beta\gamma = \beta = \delta$, priva di significato. Si avrà, conchiudendo, $\lambda = 1$, quando, e solamente quando, è $\alpha\delta - \beta\gamma$ numero primo.

quella identità; ma $\alpha\delta - \beta\gamma$ ha per divisori solo i numeri delle classi K_1, K_2 : dunque, se divisori comuni a $\beta + \alpha\lambda$ e a $\delta + \gamma\lambda$ vi fossero, essi dovrebbero forzatamente appartenere alle classi K_1, K_2 . Se arriveremo quindi a dimostrare che nessuno dei numeri delle classi K_1, K_2 può esser divisore comune a $\beta + \alpha\lambda$ e a $\delta + \gamma\lambda$, si potrà senz'altro concludere che $\beta + \alpha\lambda, \delta + \gamma\lambda$ sono primi tra loro.

A tal uopo, se la classe K_1 potesse contenere dei divisori comuni a $\beta + \alpha\lambda$ e a $\delta + \gamma\lambda$, essi, essendo già per ipotesi comuni a β e a δ , dovrebbero dividere la restanti parti $\alpha\lambda, \gamma\lambda$; e non potendo dividere λ (essendo λ il prodotto dei numeri della classe K_2), dovrebbero dividere α e γ e, contro le ipotesi, esisterebbero divisori comuni ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Analogamente, i numeri della classe K_2 essendo divisori di $\alpha\lambda, \gamma\lambda$, per poter dividere contemporaneamente $\beta + \alpha\lambda$ e $\delta + \gamma\lambda$ dovrebbero dividere β e δ ; il che è eziandio assurdo, avendo posto nella K_2 i numeri che non sono divisori comuni a γ e a δ .

I numeri $\beta + \alpha\lambda, \delta + \gamma\lambda$ non potendo, quindi, ammettere per divisori in comune nessuno dei numeri delle classi K_1, K_2 risulteranno primi tra loro. Rimane così stabilita la proposizione preliminare, dianzi enunciata.

In base a questa, si dimostra facilmente la formola che è oggetto della presente Nota.

Sia

$$S = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

un'arbitraria sostituzione lineare binaria primitiva in cui, dunque, p, q, r, s sono numeri interi primi tra loro, positivi o negativi.

Ponendo $S_1 = SH^\lambda$ e sostituendo ad S e ad H i veri valori, avremo:

$$S_1 = \begin{pmatrix} p & q + p\lambda \\ r & s + r\lambda \end{pmatrix}.$$

E scelto λ in modo che i binomii $q + p\lambda, s + r\lambda$ risultino primi tra loro (ciò che è possibile per la proposizione dianzi dimostrata), si ponga

$$\begin{aligned} q + p\lambda &= q' \\ s + r\lambda &= s'; \end{aligned}$$

allora avremo

$$S_1 = \begin{pmatrix} p & q' \\ r & s' \end{pmatrix}.$$

Distinguiamo ora due casi, secondoche il numero delle divisioni necessarie per la ricerca del m. c. d. ($= 1$) tra q' ed s' è pari o dispari. Supponiamo sia pari.

Detto θ il quoziente ⁽¹⁾ della divisione dei numeri q' ed s' , e posto $S_2 = K^{-\theta} S_1$, avremo, sostituendo,

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-\theta} \begin{pmatrix} p & q' \\ r & s' \end{pmatrix},$$

da cui

$$S_2 = \begin{pmatrix} p & q' \\ r - p\theta & s' - q'\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ p' & q'' \end{pmatrix},$$

ove, essendo θ il quoziente della divisione dei numeri q' ed s' , sarà q'' il resto.

Detto τ il quoziente della divisione dei numeri q' e q'' e posto $S_3 = H^{-\tau} S_2$, si ha

$$S_3 = \begin{pmatrix} p - \tau p' & q' - \tau q'' \\ p' & q'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'' & q''' \\ p' & q'' \end{pmatrix},$$

ove, essendo τ il quoziente della divisione dei numeri q' , q'' , sarà q''' il resto.

Sia ora ω il quoziente della divisione dei numeri q'' , q''' , e si ponga $S_4 = K^{-\omega} S_3$; allora avremo

$$S_4 = \begin{pmatrix} p'' & q''' \\ p' - \omega p'' & q'' - \omega q''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'' & q''' \\ p''' & q^{iv} \end{pmatrix}.$$

Procedendo in modo analogo, i numeri q vanno sempre decrescendo, e sono i resti successivi che si incontrano nella ricerca del m. c. d. (= 1) tra q' ed s' .

Se il numero delle divisioni necessarie per la ricerca del m. c. d. (= 1) tra q' ed s' , invece di esser pari, fosse dispari, anzichè porre $S_2 = K^{-\theta} S_1$, s' incomincerebbe col porre $S_2 = H^{-\theta} S_1$, e si procederebbe in modo analogo; si compendiano in uno i due casi, considerando l'unità come la potenza zero di un'arbitraria sostituzione.

È facile vedere come, in ambo i casi, il nostro procedimento conduca ad una sostituzione del tipo

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & 1 \end{pmatrix},$$

e risulta quindi

$$S = H^\mu \cdot K^\nu \cdot H^\xi \dots A \cdot H^\sigma.$$

Si tratta ora di far vedere che può sempre porsi

$$A = N \cdot K^\rho.$$

Ed invero, posto

$$B = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

⁽¹⁾ Evidentemente, se q' ed s' fossero di segno contrario, il quoziente della loro divisione sarebbe $-\theta$: ed allora anzichè, porre $S_2 = K^{-\theta} S_1$, dovrebbe porsi $S_2 = K^\theta S_1$.

ed eseguito il prodotto BK^2 si trova precisamente A purchè si assuma $q = R$
Con ciò si viene a stabilire l'eguaglianza

$$S = H^{\mu} \cdot K^{\nu} \cdot H^{\xi} \dots B \cdot K^{\rho} \cdot H^{\sigma}.$$

Il modulo del secondo membro dipende dalla sola sostituzione B, essendo le altre unimodulari; ma il modulo di S lo abbiamo supposto D: quindi, basta fare $P = D$ per cadere nella formula che volevamo stabilire.

Diamo, ora, un *esempio numerico* di quanto abbiamo suesposto.

Sia

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 8 & 80 \end{pmatrix}.$$

Dividendo i coefficienti 12, 16, 8, 80 per il loro m. c. d. (ciò che è lecito di fare), la S diventa:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 20 \end{pmatrix},$$

ove, 3, 4, 2, 20 sono primi tra di loro.

Ponendo $S_1 = SH^{\lambda}$, avremo:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\lambda} = \begin{pmatrix} 3 & 4 + 3\lambda \\ 2 & 20 + 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Si vede che per $\lambda = 1$ i binomi $4 + 3\lambda$, $20 + 2\lambda$ risultano primi tra loro, ed S_1 diventa

$$S_1 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 22 \end{pmatrix}.$$

Poichè il numero delle divisioni necessarie per la ricerca del m. c. d. (= 1) tra 22 e 7 è pari, s'incomincerà col porre $S_2 = K^{-3} S_1$, ove 3 è il quoziente di 22 per 7; così avremo:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo 7 il quoziente di 7 per 1, porremo $S_3 = H^{-9} S_2$; ovvero, sostituendo,

$$S_3 = \begin{pmatrix} 52 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posto ora

$$N = \begin{pmatrix} 52 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ed eseguito il prodotto $N \cdot K^e$, avremo la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 52 & 0 \\ e & 1 \end{pmatrix},$$

da cui si vede che basta assumere $e = -7$ per avere la S_2 ; quindi possiamo scrivere

$$S_3 = \begin{pmatrix} 52 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-7}.$$

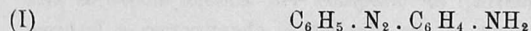
E ricordando che $H^0 = 1$, avremo infine

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^7 \begin{pmatrix} 52 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

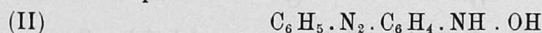
come è facile di verificare.

Chimica. — *Sopra un nuovo poliazobenzolo* (1). Nota del dott. BRUNO VALORI, presentata dal Socio A. ANGELI (2).

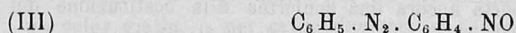
È noto come Caro, per ossidazione di anilina sia pervenuto, attraverso alla fenilidrossilammina, al nitrosobenzolo. Analogamente il p. amidoazobenzolo



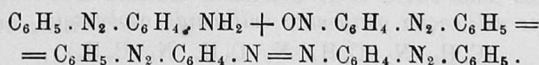
ossidato in soluzione acetica con peridrol, passa probabilmente in una prima fase nel composto



e successivamente quindi nel derivato



Quest'ultimo (III) reagisce immediatamente col p. amidoazobenzolo (I) ancora inalterato per dare



ed è questo poliazobenzolo con tre gruppi N_2 , fino ad ora non conosciuto, il prodotto principale che si ottiene ossidando con peridrol la soluzione ace-

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica e Farmacia del R. Istituto di Studi superiori di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1914.