ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Sopra alcune omografie determinate da formazioni geometriche di seconda specie.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO [1].

È noto che le $\mathbf{F}_2$ [2] di Grassmann-Peano rappresentano completamente i *sistemi di forze applicati a corpi rigidi* [cfr. [2], vol. II, pp. 127-130, per le *viti* di Ball]. Ma dalle $\mathbf{F}_2$ possono anche ottenersi delle *omografie proiettive* che credo nuove. Le proprietà di queste omografie risultano immediatamente dalle identità del n. 1, identità che, eccettuate le (1), (6), ritengo nuove e che si dimostrano in modo semplicissimo [3].

1. Siano r, s delle $\mathbf{F}_2$; A, B, C, D delle $\mathbf{F}_1$, e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ delle $\mathbf{F}_3$. Si hanno le identità seguenti:

$$\mathrm{A}r \,.\, r = \frac{rr}{2}\mathrm{A}\,, \tag{1}$$

$$\mathrm{A}r \,.\, \mathrm{B}r = \mathrm{AB}r \,.\, r - \frac{rr}{2}\mathrm{AB}\,, \tag{2}$$

$$\mathrm{A}r \,.\, \alpha r = \frac{rr}{2}\mathrm{A}\alpha\,, \tag{3}$$

$$\mathrm{A}r \,.\, \mathrm{B}r \,.\, \mathrm{C}r = \frac{rr}{2}\mathrm{ABC} \,.\, r\,, \tag{4}$$

$$\mathrm{A}r \,.\, \mathrm{B}r \,.\, \mathrm{C}r \,.\, \mathrm{D}r = \left(\frac{rr}{2}\right)^2 \mathrm{ABCD}\,, \tag{5}$$

$$\mathrm{A}r \,.\, s + \mathrm{A}s \,.\, r = rs \,.\, \mathrm{A}\,, \tag{6}$$

$$(\mathrm{A}r \,.\, s)\,\alpha = rs \,.\, \mathrm{A}\alpha + (\alpha r \,.\, s)\,\mathrm{A}\,, \tag{7}$$

$$(\mathrm{A}r \,.\, s)\,(\alpha r \,.\, s) = \frac{rr \,.\, ss}{4}\mathrm{A}\alpha\,, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}r \,.\, s)\,(\mathrm{B}r \,.\, s) = \frac{rr \,.\, ss}{4}\mathrm{AB} - \frac{ss}{2}\mathrm{AB}r \,.\, r\, + \\ + \left\{\mathrm{AB}r \,.\, rs - \frac{rr}{2}\mathrm{AB}s\right\} s\,,\end{aligned} \tag{9}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1914.

[2] Scrivo, brevemente, $\mathbf{F}_m$ al posto di *formazione geometrica di ordine* m. Per ciò che segue, cfr.: [1] C. Burali-Forti, *Lezioni di geometria metrico-proiettiva* (Bocca, Torino, 1914); [2] C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* (Mattei, Pavia, 1912-13).

[3] Volendo esprimere le $\mathbf{F}_2$ con gli elementi delle *viti* di Ball [cfr. [2], vol. II, loc. cit.], si ottengono le stesse formule ma con calcoli complicatissimi; il che prova che l'elegante metodo geometrico del Ball è meno potente di quello, pure geometrico, di Grassmann-Peano. Inutile il confronto col metodo cartesiano!

$$(10)\qquad (\mathrm{A}r\,.\,s)\,(\mathrm{B}r\,.\,s)\,(\mathrm{C}r\,.\,s) = \frac{rr\,.\,ss}{4}\,(\mathrm{ABC}\,.\,r)\,s\,,$$

$$(11)\qquad (\mathrm{A}r\,.\,s)\,(\mathrm{B}r\,.\,s)\,(\mathrm{C}r\,.\,s)\,(\mathrm{D}r\,.\,s) = \left(\frac{rr\,.\,ss}{4}\right)^2 \mathrm{ABCD}\,.$$

Insieme a queste formule intendiamo scritte quelle che si ottengono cambiando A, B, C, D in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, applicando cioè il *principio di dualità* per le **F** [cfr. ([1]), pag. 110]. Le (3), (8) corrispondono a se stesse per dualità.

Dim. (6), (1). — Sviluppando il prodotto $\mathrm{A}r\,.\,s$ [cfr. ([1]), pag. 113, (I)], si ha $\mathrm{A}r\,.\,s = -\mathrm{A}s\,.\,r + rs\,.\,\mathrm{A}$, che dimostra la (6) e anche la (1) ponendo r al posto di s.

Dim. (2). — Da ([1]). pag. 114, (II), e dalla (1), si ha

$$\mathrm{A}r\,.\,\mathrm{B}r = \mathrm{AB}r\,.\,r + (r\,.\,\mathrm{B}r)\,\mathrm{A} = \mathrm{AB}r\,.\,r + \frac{rr}{2}\,\mathrm{BA}\,.$$

Dim. (3). — Da ([1]), pag. 111, a), e dalla duale di (1), si ha

$$\mathrm{A}r\,.\,\alpha r = \mathrm{A}(r\,.\,\alpha r) = \frac{rr}{2}\,\mathrm{A}\alpha\,.$$

Dim. (4). — Dalla (2) si ha [cfr. anche ([1]), pag. 114 in fine]

$$\begin{aligned}\mathrm{A}r\,.\,\mathrm{B}r\,.\,\mathrm{C}r &= \mathrm{AB}r\,.\,r\,.\,\mathrm{C}r - \frac{rr}{2}\,\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{C}r\\ &= \frac{rr}{2}\,\{\mathrm{BC}r\,.\,\mathrm{A} + \mathrm{CA}r\,.\,\mathrm{B} + \mathrm{AB}r\,.\,\mathrm{C}\}\\ &= \frac{rr}{2}\,\mathrm{ABC}\,.\,r\,.\end{aligned}$$

Dim. (5). — Dalla (4) e dalla duale della (3).

Dim. (7). — Da ([1]), pag. 111, e pag. 114, si ha

$$(\mathrm{A}r\,.\,s)\,\alpha = (\mathrm{A}r\,.\,\alpha)\,s = (\mathrm{A}\alpha\,.\,r + r\alpha\,.\,\mathrm{A})\,s\,.$$

Dim. (8). — Da ([1]), pag. 111, e dalle (1) (3), si ha

$$(\mathrm{A}r\,.\,s)\,(\alpha r\,.\,s) = \mathrm{A}r\,.\,(\alpha r\,.\,s)\,.\,s = \frac{ss}{2}\,\mathrm{A}r\,.\,\alpha r = \frac{rr\,.\,ss}{4}\,\mathrm{A}\alpha\,.$$

Dim. (9). — Dalla duale di (2) si ha

$$(\mathrm{A}r\,.\,s)\,(\mathrm{B}r\,.\,s) = (\mathrm{A}r\,.\,\mathrm{B}r)\,s\,.\,s - \frac{ss}{2}\,\mathrm{A}r\,.\,\mathrm{B}r\,,$$

che, per la (2), dimostra la (9).

Dim. (10). — Dalla duale della (4) si ha

$$(Ar \,.\, s)\,(Br \,.\, s)\,(Cr \,.\, s) = \frac{ss}{2}\,(Ar \,.\, Br \,.\, Cr)\, s$$

che, per la (4), dimostra la (10).

Dim. (11). — Dalle (10), (8).

2. Nelle formule precedenti abbiamo sempre sottinteso il simbolo $\circ$ di *prodotto alternato*, che è simbolo di *operazione* (non di *funzione*); così, ad es., abbiamo scritto $Ar \,.\, s$ al posto della notazione completa $(A\circ r)\circ s$; e il sottintendere $\circ$ non porta inconvenienti nelle formule (1)-(11).

Se a è una $\mathbf{F}_m$, e x è una $\mathbf{F}_n$, è noto che $a\circ x$ è una $\mathbf{F}_{m+n}$ o $\mathbf{F}_{m+n-4}$. Segue che il *simbolo composto* $a\circ$ è OPERATORE LINEARE (a sinistra) tra le $\mathbf{F}_n$ e le $\mathbf{F}_{m+n}$ o $\mathbf{F}_{m+n-4}$. Nel simbolo composto $a\circ$, il segno $\circ$ *non può essere sottinteso*, perchè, sottintendendolo, si *identificherebbe* un operatore lineare $(a\circ)$ ad una $\mathbf{F}_m$ (alla a), il che è assurdo.

Le lettere delle quali si è fatto uso nel n. 1 conservano il loro significato; inoltre indicheremo con P una $\mathbf{F}_1$ arbitraria, e con π una $\mathbf{F}_3$, pure arbitraria.

L'operatore lineare $r\circ$, *omografia*, trasforma $\mathbf{F}_1$ in $\mathbf{F}_3$, ed $\mathbf{F}_3$ in $\mathbf{F}_1$; la sua *posizione* [cfr. ([1]), III, IV] è *omografia proiettiva* tra *punti* e *piani*, *piani* e *punti*.

Dalla (5) risulta subito che: *$r\circ$ è degenere solo quando* $rr = 0$, *cioè quando r rappresenta* (con la posizione) *una retta*.

Dalla (1) risulta pure subito che

$$(r\circ)^2 = \frac{rr}{2}\,. \tag{12}$$

cioè che: *il quadrato dell'omografia $r\circ$ è il semi-invariante di r*; quindi, *se $r\circ$ non è degenere, la sua inversa è multipla di $r\circ$*.

Segue che: *soltanto al punto all'infinito dell'asse di r* (cioè al vettore $r\omega$) *corrisponde, rispetto ad $r\circ$, il piano all'infinito; soltanto i piani paralleli all'asse di r hanno per corrispondenti, rispetto ad $r\circ$, punti all'infinito* [perchè $(r\circ\pi)\,\omega = 0$, solo quando $\pi \,.\, r\omega = 0$].

È poi chiaro (poichè $Pr \,.\, P = 0$, $\pi r \,.\, \pi = 0$) che *ogni* $\mathbf{F}_1$ o $\mathbf{F}_3$ *è unita rispetto ad $r\circ$*.

Se a è una $\mathbf{F}_2$ ad invariante nullo ($aa = 0$), e, essendo $Aa = 0$, $Ba = 0$, si pone $AB = ma$, allora dalla (2) si ha

$$(r\circ A)\,(r\circ B) = mar \,.\, r - \frac{rr}{2}\,ma = \frac{m}{2}\,\{2ar \,.\, r - rr \,.\, a\}\,,$$

da cui: *se un punto (piano) giace nella (passa per la) retta a, il piano* (*punto*) *corrispondente, rispetto ad* $r\circ$, *passa per la* (*giace nella*) *retta* $2ar\,.\,r - rr\,.\,a$.

L'omografia $r\circ$ dà dunque anche una corrispondenza, *non lineare*, tra F_1F_1 e F_1F_1 (tra *rette* e *rette*): e precisamente, alla retta

$$a \quad \text{fa corrispondere} \quad 2ar\,.\,r - rr\,.\,a\,.$$

Si può notare che, essendo b un'altra retta,

$$(2ar\,.\,r - rr\,.\,a)\,(2br\,.\,r - rr\,.\,b) = (rr)^2\,.\,ab\,,$$

e quindi *solo a rette complanari* (*per* $r\circ$ *non degenere*) *corrispondono rette complanari.*

3. Per i prodotti (funzionali) delle due omografie $r\circ$, $s\circ$, poniamo [1]

$$(13) \qquad \lambda = s\circ\,.\,r\circ \quad , \quad \mu = r\circ\,.\,s\circ\,,$$

cioè, per P, π, arbitrarî,

$$(13)' \qquad \begin{cases} \lambda P = Pr\,.\,s & , \quad \lambda\pi = \pi r\,.\,s \\ \mu P = Ps\,.\,r & , \quad \mu\pi = \pi s\,.\,r\,. \end{cases}$$

È evidente che λ, μ *sono omografie che trasformano* F_1 *in* F_1 *e* F_3 *in* F_3; *quindi le loro posizioni* sono omografie proiettive tra punti e punti e tra piani e piani.

Dalla (11) risulta subito che: *le omografie* λ, μ *sono, insieme, degeneri, solamente quando una almeno delle* r, s *è ad invariante nullo, cioè ha per posizione una retta.*

Da (13') si ha subito che: *se* $ss = 0$, *i punti* λP *stanno nella retta* s [2]. Ma dalla (9) si ha, per $ss = 0$,

$$\mu A\,.\,\mu B = \frac{ABs}{2}\,\{2rs\,.\,r - rr\,.\,s\}\,;$$

e quindi: *se* $ss = 0$, *i punti* λP, μP *stanno, rispettivamente, sulle rette* s, $2rs\,.\,r - rr\,.\,s$ (cfr. n. 2).

Dalla (6), ed osservando che

$$Pr\,.\,Ps = \mu P\,.\,P = -\lambda P\,.\,P\,,$$

si ha: *i punti* P, λP, μP *sono collineari, e stanno sulla retta* $Pr\,.\,Ps$; λP *e* μP *hanno egual posizione solamente quando* $rs = 0$ [cioè r e s *sono, secondo Ball,* — cfr. [2], vol. II, pag. 129, — *reciproche*].

[1] Sarà certo interessante studiare anche i prodotti di tre, o più, di tali omografie.

[2] E dualmente: *i piani* $\lambda\pi$ *passano per la retta* s. In generale noi enunceremo il teorema per le F_1 lasciando al lettore la cura di enunciare il duale per le F_3.

Dalla (8) si ha

$$4\lambda P \,.\, \lambda\pi = rr \,.\, ss \,.\, P\pi \,;$$

il secondo membro è zero per λ degenere o per $P\pi = 0$; e quindi: *se λ è invertibile, i corrispondenti dei punti di un piano formano il piano corrispondente rispetto a λ (lo stesso per μ).* Lo stesso si deduce dalla (10).

Dalle (12), (13) si ha subito

$$\mu\lambda = \lambda\mu = \frac{rr \,.\, ss}{4}\,; \tag{14}$$

cioè: *i prodotti delle due omografie λ, μ eguagliano il prodotto dei semi-invarianti di r e s*; quindi, *se λ, μ* sono invertibili, *ciascuna di esse è un multiplo dell'inversa dell'altra.*

Risulta subito, da questo, che: *i piani $\mu\omega$, $\lambda\omega$ (corrispondenti del piano all'infinito) sono i* PIANI LIMITI *di λ e μ, cioè i luoghi dei punti i cui corrispondenti sono all'infinito.*

Dalla (6) si ha $\lambda = rs - \mu$; e quindi, per la (14),

$$\lambda^2 = rs \,.\, \lambda - \frac{rr \,.\, ss}{4}\,, \quad \mu^2 = rs \,.\, \mu - \frac{rr \,.\, ss}{4}\,, \tag{15}$$

le quali provano che: *le potenze positive di λ (e lo stesso per μ) sono funzioni lineari di λ, e trasformano un punto P in punti della retta $Pr \,.\, Ps$; soltanto per $rs = 0$, λ^2 è numero*; ecc. per altre proprietà delle potenze.

4. Il punto P, o il piano π, è unito, rispetto a λ, solo quando $P \,.\, \lambda P = 0$, ovvero $\pi \,.\, \lambda\pi = 0$, condizione che equivale a

$$Pr \,.\, Ps = 0\,, \quad \text{ovvero} \quad \pi r \,.\, \pi s = 0\,; \tag{16}$$

ma questa condizione è simmetrica rispetto ad r e s, e quindi: *ogni elemento unito rispetto a λ è pure unito rispetto a μ*, il che risulta anche dalla (6).

Affinchè la (16) sia verificata, è necessario e basta che Pr sia multiplo di Ps, cioè esistano i numeri x, y tali che

$$P(xr - ys) = 0\,, \quad \text{ovvero} \quad \pi(xr - ys) = 0\,;$$

ma per questo è *necessario* che $xr - ys$ sia ad invariante nullo, cioè che

$$x^2 \,.\, rr - 2xy \,.\, rs + y^2 \,.\, ss = 0\,; \tag{17}$$

e quindi: *gli elementi (punti, piani) uniti di λ e μ sono, se esistono, quelli che appartengoon (stanno, passano) alla retta $xr - ys$, essendo x/y soluzione della* (17). Queste rette, se esistenti, si chiameranno *rette unite* di λ e μ.

Dalla (17) risulta subito che: *per* $rr \neq 0$ *e* $ss \neq 0$ *esiste nessuna, o una, o due* [1] *rette unite, secondo che* $(rs)^2 - rr \,.\, ss \lesseqgtr 0$; *per* $rr = 0$ *e* $ss \neq 0$, *le rette unite sono* r *e* $ss \,.\, r - 2rs \,.\, s$; *analogamente per* $rr \neq 0$ *e* $ss = 0$; *per* $rr = 0$ *e* $ss = 0$ *le rette unite sono* r *e* s.

Dalla (7) si deduce che

$$\text{da } \mathrm{P}\pi = 0 \quad \text{segue} \quad \lambda\mathrm{P} \,.\, \pi = \lambda\pi \,.\, \mathrm{P}\,;$$

e quindi: *i piani che contengono i corrispondenti dei loro punti, sono soltanto i piani uscenti dalle rette unite; i piani* π, *tali che* π, $\lambda\pi$, $\mu\pi$ *passano per un dato punto* P, *sono tutti e soli i piani uscenti dalla retta* $\mathrm{P} \,.\, \lambda\mathrm{P}$, *identica a* $\mathrm{P} \,.\, \mu\mathrm{P}$ *e a* $\mathrm{P}r \,.\, \mathrm{P}s$.

Se a è una $\mathbf{F}_2$, se $aa = 0$ e $\mathrm{P}a = 0$, si ha

$$\lambda\mathrm{P} \,.\, a = - ra \,.\, \mathrm{P}s + sa \,.\, \mathrm{P}r\,,$$

e quindi: *le rette che contengono i corrispondenti dei loro punti sono soltanto le rette unite.*

5. Sia a una $\mathbf{F}_2$ ad invariante nullo ($aa = 0$). Dalla (9), essendo $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ delle $\mathbf{F}_1$ giacenti in a, si ha sùbito: *se il punto* P *varia nella retta* a, *i punti* $\lambda\mathrm{P}$, $\mu\mathrm{P}$ *variano rispettivamsnte nelle rette*

$$(18) \qquad \begin{cases} u = rr \,.\, ss \,.\, a - 2ss \,.\, ar \,.\, r + 2(2rs \,.\, ar - rr \,.\, as)s \\ v = rr \,.\, ss \,.\, a - 2rr \,.\, as \,.\, s + 2(2rs \,.\, as - ss \,.\, ar)r\,; \end{cases}$$

e se il piano π *passa per* a, *i piani* $\lambda\mu$, $\mu\pi$ *passano per* u, v.

Osservando che

$$(19) \qquad v - u = 4rs(as \,.\, r - ar \,.\, s) \quad , \quad (v - u)(v - u) = -2uv\,,$$

si ha, per le (18): *le rette* u, v *coincidono solo quando* r *e* s *sono reciproche* ($rs = 0$); *sono complanari, solo quando* $v - u$ *è ad invariante nullo.*

Affinchè sia $uv = 0$, è necessario, per le (19), che si abbia

$$(as)^2\, rr - 2as \,.\, ar \,.\, rs + (ar)^2\, ss = 0\,,$$

cioè (n. 4)

$$\frac{as}{ar} = \frac{x}{y}\,, \quad \text{ovvero} \quad a(xr - ys) = 0\,.$$

Ma (n. 4) $xr - ys$ è retta unita; e quindi: ***le rette a per le quali u, v sono complanari, sono tutte e sole quelle che si appoggiano ad una qualunque delle rette unite.***

[1] Non complanari perchè, a causa della (17), per esser complanari dovrebbe essere $(rs)^2 = rr \,.\, ss$.